CIMAT

90DSI01 Sistemas Dinámicos I Septiembre 4, 2006

Tarea 4

Para $p \geq 2$ entero, defina $\Sigma_p = \{0, 1, \ldots, p-1\}^{\mathbb{N}}$ y considere la métrica

$$d_p(\bar{s}, \bar{t}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|s_k - t_k|}{p^k}.$$

1. Pruebe el *teorema de proximidad*: Sean $\bar{s}, \bar{t} \in \Sigma_p$ y suponga que $s_k = t_k$ para $k = 0, \ldots, n$. Entonces $d_p(\bar{s}, \bar{t}) \leq 1/p^n$. Conversamente, si $d_p(\bar{s}, \bar{t}) < 1/p^n$, entonces $s_k = t_k$ para todo $k \leq n$.

2. Pruebe que el espacio métrico (Σ_p, d_p) es totalmente disconexo.

   Sugerencia: Considere $p = 2$ y defina $C_0^0 = \{\bar{s} : s_0 = 0\}$ y $C_1^0 = \{\bar{s} : s_0 = 1\}$ dos cilindros de Σ_2. Pruebe que los conjuntos son totalmente disconexos entre sí (esto es, todo punto en C_0^0 está a distancia positiva de todos los puntos en C_1^0). Repita el argumento para la partición de $C_0^0 = C_{00}^{01} \cup C_{01}^{01}$ y $C_1^0 = C_{10}^{01} \cup C_{11}^{01}$ y proceda por inducción.

3. Pruebe que el shift completo $\sigma : \Sigma_p \to \Sigma_p$ es topológicamente mezclante.

4. Sea $R_\alpha : S^1 \to S^1$ el mapa rotación con $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Pruebe que R_α no es topológicamente mezclante.

Fecha de entrega: Septiembre 11, 2006, en clase.