

CIMAT

90DSI01

Sistemas Dinámicos

Octubre 25, 2007

Tarea 9

Cada problema tiene un valor de 10/3 puntos.

1. Una transformación T que preserva medida sobre un espacio de medida finita (X, \mathfrak{U}, μ) es ergódica si y sólo si para cada $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{U}, \mu)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(T^j(x)) = \frac{1}{\mu(X)} \int_X f(x) d\mu,$$

para casi toda $x \in X$.

2. Una transformación T que preserva medida sobre un espacio de medida finita (X, \mathfrak{U}, μ) es ergódica si y sólo si para todo $A \in \mathfrak{U}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_A(T^j(x)) = \frac{\mu(A)}{\mu(X)},$$

para casi todo $x \in X$.

3. Sea (X, \mathfrak{U}, μ) un espacio de probabilidad y $T : X \rightarrow X$ una transformación que preserva medida. Demuestre que para todo $A \in \mathfrak{U}$ y de medida positiva, existe un subconjunto $A_0 \subset A$ medible, $\mu(A_0) > 0$ y tal que para toda $x \in A_0$,

$$\tau_A(x) \geq \mu(A).$$

(*Sugerencia:* sea $A_1 = \{x \mid \tau_A(x) \geq \mu(A)\}$ y pruebe que $\mu(A_1) > 0$, $A = \cup_{n \geq 0} T^{-n}(A_1 \cap A)$.)

Fecha de entrega: Noviembre 1, 2007 en clase.