Lema 2 $\quad g \mapsto F[g]$ satisface

(i) $\exists \sigma$, $\quad 0<\sigma<1$ tal que si $\|dg(x^s)\| \leq \sigma \quad \forall x^s \in \mathbb{E}^s$

entonces $\quad \|d(F[g])(x^s)\| \leq \sigma \quad \forall x^s \in \mathbb{E}^s$.

(ii) Definiendo $\displaystyle h_g(\delta) := \sup_{\|x_1^s - x_2^s\| \leq \delta} \|dg(x_1^s) - dg(x_2^s)\|$

$$K(\delta) := \sup_{\substack{\|y_1^s - y_2^s\| \leq \delta \\ \|z_1^u - z_2^u\| \leq \delta}} \max_{\substack{i=1,2 \\ \sigma = s,u}} \|\partial_\sigma f_i(y_1^s, z_1^u) - \partial_\sigma f_i(y_2^s, z_2^u)\|$$

Si $\exists c>0$ tq $\; h_g(\delta) \leq c\,k(\delta) \quad \forall \delta>0$ entonces

$$h_{F[g]}(\delta) \leq c\,k(\delta) \quad \forall \delta>0.$$

(iii) F es una contracción en el espacio

$$\Omega := C_0^1(\mathbb{E}^s, \mathbb{E}^u) \cap \{g \mid \|dg(x^s)\| \leq \sigma\}$$

con la norma uniforme.

de convergencia

Demo (Lema 2)

(1) Sup. $\|dg(x^s)\| \le \sigma \quad \forall x^s \in \mathbb{E}^s$. Por demostrar $\|dF[g](x^s)\| \le \sigma \quad \forall x^s \in \mathbb{E}^s$.

Sea $0 < \theta < \frac{b-a}{4}$ y $\sigma = \frac{\theta}{b-a-3\theta}$ $\left(\theta < \frac{b-a}{4},\ 4\theta < b-a,\ \theta < b-a-3\theta\right)$

$\Rightarrow 0 < \sigma < 1$.

$$F[g](x^s) = B^{-1}\left[g\left(Ax^s + f_1(x^s, g(x^s))\right) - f_2(x^s, g(x^s))\right]$$

$$dF[g](x^s) = B^{-1}\left[dg\cdot\left(A + \partial_s f_1 + \partial_u f_1\, dg\right) - \partial_s f_2 - \partial_u f_2\, dg\right]$$

$$\Rightarrow \|dF[g](x^s)\| \le \|B^{-1}\|\left[\|dg\|\left(\|A\| + \|\partial_s f_1\| + \|\partial_u f_1\|\|dg\|\right) + \|\partial_s f_2\| + \|\partial_u f_2\|\|dg\|\right]$$

$$\le \frac{1}{b}\left[\sigma(a + \theta + \theta\sigma) + \theta + \theta\sigma\right], \quad 0 < \sigma < 1$$

$$\le \frac{1}{b}\left[\sigma(a + 3\theta) + \theta\right] = \frac{1}{b}\left[\sigma(\cancel{a}+\cancel{3\theta}) + \sigma(b - \cancel{a} - \cancel{3\theta})\right] = \sigma. \quad \forall x^s \in \mathbb{E}^s$$

(2) Dados $h_g(\delta)$ y $k(\delta)$, si $\exists c > 0$ tq $h_g(\delta) \le c\,k(\delta) \Rightarrow h_{F(g)}(\delta) \le c\,k(\delta)$. $\forall \delta > 0$

Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{E}^s$ arbitrarios.

Notación: $p = Ax_1 + f(x_1, g(x_1))$; $\alpha = (x_1, g(x_1))$

$q = Ax_2 + f(x_2, g(x_2))$; $\beta = (x_2, g(x_2))$.

$$\Rightarrow dF[g](x_1) = B^{-1}\left[dg(p)\left(A + \partial_s f_1(\alpha) + \partial_u f_1(\alpha)\, dg(x_1)\right) - \partial_s f_2(\alpha) - \partial_u f_2(\alpha)\, dg(x_1)\right]$$

$$dF[g](x_2) = B^{-1}\left[dg(q)\left(A + \partial_s f_2(\beta) + \partial_u f_2(\beta)\, dg(x_2)\right) - \partial_s f_2(\beta) - \partial_u f_2(\beta)\, dg(x_2)\right]$$

Queremos acotar $\|dF[g](x_1) - dF[g](x_2)\|$ usando $k(\delta)$.

④ ... $dF[g](x_1) - dF[g](x_2) = B^{-1}\left[(dg(p)-dg(q))A + \dots\right].$

término más difícil de acotar

⑤ ... $dg(p)\,\partial_u f_1(\alpha)\,dg(x_1) - dg(q)\,\partial_u f_1(\beta)\,dg(x_2) = (dg(p)-dg(q))\,\partial_u f_1(\alpha)\,dg(x_1) +$

$dg(q)\,(\partial_u f_1(\alpha) - \partial_u f_1(\beta))\,dg(x_1) +$

$dg(q)\,(\partial_u f_1(\beta))(dg(x_1) - dg(x_2))$

Sabemos que para $x_1, x_2 \in \mathbb{E}^s$ arbitrarios

$$\|g(x_1) - g(x_2)\| \le \sup_k \|dg\|\cdot\|x_1 - x_2\| \le \sigma\|x_1 - x_2\| \underset{0<\sigma<1}{<} \|x_1 - x_2\|$$

$\Rightarrow \|\partial_\sigma f_1(\alpha) - \partial_\sigma f_1(\beta)\| \le k(\|x_1 - x_2\|)$ (i.e. $k(\delta)$ con $\delta = \|x_1 - x_2\|$).

Tomando normas en ⑤ obtenemos

$$\|dg(p)\,\partial_u f_1(\alpha)\,dg(x_1) - dg(q)\,\partial_u f_1(\beta)\,dg(x_2)\| \le h(\|p-q\|)\,\theta\sigma + \sigma^2 k(\|x_1 - x_2\|) + \sigma\theta\, h(\|x_1 - x_2\|)$$

Acotando los otros términos en ④ y usando ⑤, se obtiene

$$\|dF[g](x_1) - dF[g](x_2)\| \le \frac{1}{b}\Big(\underset{\text{¿ estimación ?}}{h(\|p-q\|)}(a+\theta+\theta\sigma) + h(\|x_1 - x_2\|)(\sigma\theta+\theta) + k(\|x_1 - x_2\|)(2\sigma+\sigma^2+1)\Big)$$

$$\begin{aligned}
\|p-q\| &= \|Ax_1 + f_1(x_1, gx_1) - Ax_2 - f_1(x_2, gx_2)\| \\
& \|Ax_1 + f_1(x_1,gx_1) - Ax_2 - f_1(x_1, gx_2) + f_1(x_1,gx_2) - f_1(x_2 gx_2)\| \\
&\le \|A\|\|x_1 - x_2\| + \|f_1(x_1, gx_1) - f_1(x_1, gx_2) + f_1(x_1,gx_2) - f_1(x_2 gx_2)\| \\
&\le \|A\|\cdot\|x_1 - x_2\| + \|\partial_u f_1\|\cdot\|g(x_1) - g(x_2)\| + \|\partial_s f_1\|\|x_1 - x_2\| \\
&\le \|A\|\cdot\|x_1 - x_2\| + \theta\,\underbrace{\|dg\|}_{\le\sigma}\cdot\|x_1 - x_2\| + \theta\cdot\|x_1 - x_2\| \\
&\le (\|A\| + \theta\sigma + \theta)\|x_1 - x_2\|
\end{aligned}$$

Sup. θ pequeña tal que $\|A\| + \sigma(\theta+1) < 1$.

$\Rightarrow \|p-q\| < \|x_1 - x_2\|$

Por lo tanto,

$$\|dF[g](x_1) - dF[g](x_2)\| \le \frac{1}{b}\Big(h(\|x_1-x_2\|)(a+2\theta+2\theta\sigma) + k(\|x_1-x_2\|)(\sigma+1)^2 \Big) \quad 0<\sigma<1$$

$$\le \frac{1}{b}\Big(h(\|x_1-x_2\|)(a+4\theta) + 4k(\|x_1-x_2\|) \cancel{(\sigma+1)^2}\Big)$$

Si $h_g(\delta) \le c\,k(\delta)$ para alguna $c>0$, entonces

$$\|dF[g](x_1) - dF[g](x_2)\| \le \frac{1}{b}\Big(c\,k(\|x_1-x_2\|)(a+4\theta) + 4k(\|x_1-x_2\|)\Big)$$

$$= k(\|x_1-x_2\|)\cdot \frac{4 + c(a+4\theta)}{b}$$

Elegimos $c>0$ tal que $c \geq \frac{4}{b-a-4\theta}$ $\left(\text{ie } \frac{4+c(a+4\theta)}{b} \le c \right)$.

(notar que $b-a-4\theta>0$ ya que $0<\theta<\frac{b-a}{4}$).

$$\Rightarrow \|dF[g](x_1) - dF[g](x_2)\| \le c\,k(\|x_1-x_2\|)$$

$\therefore$ $h_{F[g]}(\delta) \le c\,k(\delta)$ $\forall \delta>0$ (x_1, x_2 fueron arbitrarios).

(3) Tarea.

Idea: tomar $g_1, g_2 \in \Omega = C_0^1(\mathbb{E}^s, \mathbb{E}^u) \cap \{ g \mid \|dg\| \le \sigma < 1\}$

La norma de convergencia unif. es equivalente a

$$\|g_1 - g_2\| = \sup_{x^s\in\mathbb{E}^s} \Big\{ \|g_1(x^s) - g_2(x^s)\|, \|dg_1(x^s) - dg_2(x^s)\| \Big\}$$

Por definición de Ω y parte (1) del lemma, podemos suponer

$$\|g_1 - g_2\| = \sup_{x^s\in\mathbb{E}^s} \{ \|g_1(x^s) - g_2(x^s)\| \}$$

$$\|F[g_1] - F[g_2]\| = \sup_{x^s\in\mathbb{E}^s} \{ \|F[g_1](x^s) - F[g_2](x^s)\| \}$$

ya que las derivadas están acotadas por σ.