CIMAT

90DSI01 Sistemas Dinámicos Agosto 14, 2008

Tarea 1

1. Sea $M : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal con representación matricial
$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$
Demuestre lo siguiente:
   (a) M induce una transformación $\widehat{M} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ si y sólo si $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.
   (b) $\widehat{M}$ es una biyección de $\mathbb{T}^2$ si y sólo si $det(M) = \pm 1$. En este caso, $\widehat{M}$ es llamado *automorfismo algebraico* de $\mathbb{T}^2$.

2. Denote por $\mathbb{T}^2$ el 2-toro, sean $z_0, w_0 \in S^1$ y defina $\varphi(z, w) = (z_0 z, w_0 w)$. Demuestre que z_0 y w_0 son algebraicamente independientes si y sólo si el conjunto $\{\varphi^k(z, w) : k \in \mathbb{Z}\}$ es denso en $\mathbb{T}^2$ para todo $z, w \in S^1$.

3. En la demostración vista en clase de conjugación topológica entre los homeomorfismos $\varphi : [a, b] \to [a, b]$ y $\psi : [c, d] \to [c, d]$, pruebe lo siguiente:
   (a) $h : [a, b] \to [c, d]$ está bien definida,
   (b) h es un homeomorfismo, y
   (c) $h \circ \varphi = \psi \circ h$.

4. Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x + x^2/(1 + x^2)$. Demuestre que no puede existir un difeomorfismo $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h \circ f = g_\mu \circ h$, con $g_\mu(x) = \mu x, \mu \in \mathbb{R}$.

5. Demuestre que los irracionales forman un conjunto genérico en $\mathbb{R}$ mientras que $\mathbb{Q}$ es un conjunto de primera categoría Baire.

   [Un conjunto es *genérico* (o residual) si contiene un conjunto G_δ denso. Un conjunto es *primera categoría Baire* si es la unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte.]

Fecha de entrega: Agosto 21, 2008 en clase.