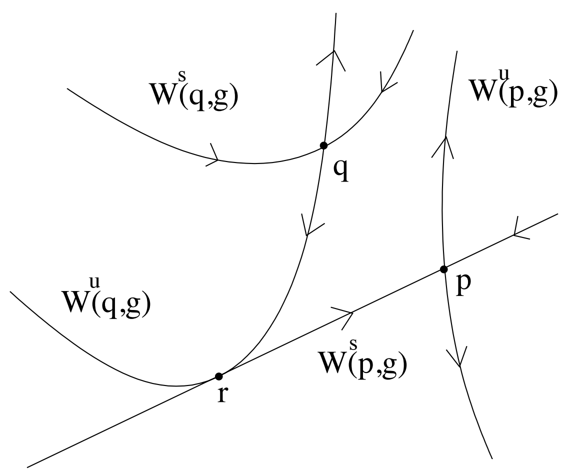
CIMAT

90DSI01 Sistemas Dinámicos Noviembre 6, 2008

Tarea 12

1. Demuestre que si Φ es un campo vectorial Kupka–Smale, entonces el ω–límite de cualquier órbita es, o una singularidad o una órbita cerrada.

2. Sea M una superficie compacta, $f, g \in \mathrm{Diff}^1(M)$. Suponga que f es Kupka–Smale y que g tiene dos puntos periódicos $p, q \in M$ tales que $W^s(p, g)$ tiene un punto de intersección no transversal con $W^u(q, g)$ (ver figura). Demuestre que f no puede ser conjugada a g.



3. Demuestre que todo difeomorfismo Morse–Smale que preserva orientacion sobre S^1 es C^1–estructuralmente estable.

4. Demuestre que para i, j fijos y para cada $g \in \mathcal{N}(f)$,

$$W^s_R(p_i(g), g) \pitchfork W^u_r(p_i(g), g),$$

si y sólo si

$$\psi_{i,j}(g) \pitchfork_K \Delta,$$

donde $K = \overline{\mathbb{D}_{s_i}(R)} \times \overline{\mathbb{D}_{u_j}(R)}$.

Definiciones y notación:

- Un difeomorfismo $f: M \to M$ clase C^k es un difeomorfismo *Morse–Smale* si satisface las siguientes condiciones:
  - $\mathrm{NE}(f)$ consiste únicamente de un número finito de puntos periódicos hiperbólicos.
  - Para cualesquier $p, q \in \mathrm{NE}(f)$ se tiene $W^s(p) \pitchfork W^u(q)$.
- Sean $p_1, p_2 \in \mathrm{Per}_h(n, f)$. Por el teorema de Smale, existen encajes $\psi_i^\sigma : \mathbb{R}^{\sigma_i} \to M$ tales que $\psi_i^\sigma(0) = p_i$ y $\psi_i^\sigma(\mathbb{R}^{\sigma_i}) = W^\sigma(p_i, f)$, σ denota s o u y σ_i denota la dimensión de la variedad estable o inestable.
- Dado $R > 0$ y $p \in \mathrm{Per}_h(f)$, se define

$$\begin{aligned} W_R^\sigma(p, f) := \{q \in W^\sigma(p, f) \mid \exists \gamma : [0,1] \to M,\ \mathrm{long}(\hat{\gamma}) < R, \\ \gamma(0) = q,\ \gamma(1) = p,\ \hat{\gamma} \subset W^\sigma(p, f)\}. \end{aligned}$$

- Sea $f \in \mathcal{H}_n$ y tal que $|\mathrm{Per}(n, f)| = N$. Dado un abierto $\mathcal{N}$ de f en $\mathcal{H}_n$, defina $p_i : \mathcal{N} \to M$ por $p_i(g) = p_{i,g} \in \mathrm{Per}_h(n, g)$.
- Fijando $1 \leq i, j \leq N$ distintos, defina $\psi_{i,j} : \mathcal{N} \to C^k(\mathbb{R}^{s_i} \times \mathbb{R}^{s_j}, M \times M)$ por

$$\psi_{i,j}(g)(x, y) := (\psi_i^s(g)(x), \psi_j^u(g)(y)).$$

Fecha de entrega: Noviembre 20, 2008 en clase.