CIMAT

90DSI01 Sistemas Dinámicos Septiembre 4, 2008

Tarea 4

1. Un *campo vectorial Halmitoniano* en $\mathbb{R}^{2n}$ es un campo definido por una función real-valuada y diferenciable $H(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$, y tal que para cada $\bar{x} \in \mathbb{R}^{2n}$,
$$\Phi(\bar{x}) = \Phi(\bar{q}, \bar{p})^t = \left(\partial_{p_j} H, -\partial_{q_j} H\right)^t.$$
Muestre que el comportamiento *recurrente* de campos Halmitonianos es totalmente distinto al de campos gradientes calculando el $\omega-$ y $\alpha-$límites de un $\bar{x} = (q, p)$ genérico en $\mathbb{R}^2$ y
$$H(\bar{q}, \bar{p}) = -\frac{q^2}{2} + \frac{q^4}{4} + \frac{p^2}{2}.$$

2. Sea M compacta, $\Phi \in \mathfrak{X}^r(M)$ y φ_t el flujo asociado. Demuestre que para todo $p \in M$, $\omega(p)$ es un conjunto conexo. De un ejemplo de una variedad no compacta y un campo vectorial no trivial tal que $\omega(p)$ no es conexo.

3. Sea $\varphi(x, y) = (2x+y, x+y)$ un difeomorfismo clase C^1 actuando sobre $\mathbb{R}^2$, con punto fijo en $\bar{0} = (0, 0)$.
   (a) Demuestre que $\bar{0}$ es hiperbólico y calcule sus variedades estables e inestables.
   (b) Sea $\Phi : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ la aplicación inducida por φ. Demuestre que $\bar{0}$ es de nuevo un punto fijo hiperbólico de Φ y sus variedades estables e inestables son densas en el 2-toro.

4. Con el producto interno $< \cdot, \cdot >_s$ visto en clase, demuestre que si $A \in \mathbb{L}(\mathbb{R}^m)$ y para todo $\lambda \in \mathrm{Spec}(A)$, $|\lambda| < 1$, entonces $|A|_s < 1$

Fecha de entrega: Septiembre 11, 2008 en clase.