CIMAT

90DSI01 | Sistemas Dinámicos | Septiembre 11, 2008

Tarea 5

1. Demuestre que el operador $F : C_0^1(\mathbb{E}^s, \mathbb{E}^u) \to C_0^1(\mathbb{E}^s, \mathbb{E}^u)$ del teorema de Hadamar–Perron es una contracción en el espacio Ω dotado con la topología de convergencia uniforme.
2. Sea $I = [0,1]$ y denote por $\mathrm{HD}^1(I)$ el conjunto de todos los difeomorfismos $f : I \to I$ clase C^1 tales que, si $p \in \mathrm{Per}(f)$, entonces p es hiperbólico. Demuestre que $\mathrm{HD}^1(I)$ es un conjunto abierto y denso en el espacio $\mathrm{Diff}^1(I)$.
3. Sea φ_t un flujo definido en M y asociado a un campo vectorial $\Phi \in \mathfrak{X}^r(M)$. Suponga que M es compacto. Demuestre lo siguiente,
   (a) $\mathrm{NE}(\varphi_t)$ es cerrado e invariante bajo el flujo.
   (b) Para todo $p \in M$, $\omega(p), \alpha(p) \subset \mathrm{NE}(\varphi_t)$.
   (c) $\mathrm{Per}(\varphi_t) \subseteq \mathcal{R}(\varphi_t) \subseteq \mathrm{NE}(\varphi_t)$.
4. Sea (X, f) un sistema dinámico topológico, con $f : X \to X$ un homeomorfismo y X un espacio métrico, compacto, conexo y perfecto. Demuestre que si $\mathrm{Per}(f)$ es denso en X y $f^n \neq Id$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces f tiene un punto (positivamente) recurrente *no periódico.*

Definiciones: Sea φ_t, Φ y M como en el problema 2 (para el caso discreto, las definiciones son similares).

- $p \in M$ es un punto *no errante* si para toda vecindad U de p existe $t > 0$ tal que $\varphi_t(U) \cap U \neq \emptyset$. El conjunto de todos los puntos no errantes de M se denota por $\mathrm{NE}(\varphi_t)$.
- p es un punto *(positivamente) recurrente* si $p \in \omega(p)$. Si el flujo es invertible y $p \in \alpha(p)$ entonces p es llamado *negativamente recurrente.* La cerradura de todos los puntos positiva y negativamente recurrentes se denota $\mathcal{R}(\varphi_t)$.

Fecha de entrega: Septiembre 18, 2008 en clase.