CIMAT

90DSI01 Sistemas Dinámicos Septiembre 25, 2008

Tarea 7

1. Utilizando el Lema de Zorn, demuestre que si X es un espacio métrico compacto, entonces todo sistema dinámico discreto (X, φ) tiene un conjunto mínimo.

2. Sea $M = S^1$ y $\varphi : S^1 \to S^1$ un homeomorfismo sin puntos periódicos. Demuestre lo siguiente:

   (a) Para todo $x, y \in S^1$ se tiene
   $$\omega(x) = \omega(y) = \alpha(y) = \alpha(x).$$

   (b) Denote por Δ el conjunto límite de cualquier $x \in S^1$. Demuestre que Δ es perfecto y mínimo en S^1.

3. Considere el sistema de ecuaciones
   $$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x + y(1 - x^2 - 2y^2). \end{aligned}$$
   Demuestre (sin resolver el sistema) que el campo vectorial tiene una órbita cerrada.

4. Sea M una variedad compacta de dimensión 2. Demuestre que si $\Phi \in \mathfrak{X}^1(M)$ es un campo vectorial tal que M es su conjunto mínimo para el flujo φ_t, entonces $M = \mathbb{T}^2$ ó $M = \mathbb{K}^2$, la botella de Klein.[1]

5. Sean $f \in \text{Homeo}(S^1)$, F y $G = F + k$ dos levantamientos de f. Demuestre que $\rho(F) = \rho(G) + k$, y por lo tanto $\rho(f)$ es independiente del levantamiento usado en la definición.

Fecha de entrega: Octubre 9, 2008 en clase.

[1] De hecho, M no puede ser igual a $\mathbb{K}^2$ ya que, en esta variedad, un flujo sin puntos fijos tiene siempre una curva cerrada. Ver referencias en la página del curso.