CIMAT

90DSI01 Sistemas Dinámicos Octubre 16, 2008

Tarea 9

1. Demuestre que si $f, h \in \mathrm{Homeo}_+(S^1)$, entonces $\rho(f) = \rho(h^{-1} \circ f \circ h)$.
2. Sea $f \in \mathrm{Homeo}_+(S^1)$ y suponga que $\rho(f)$ es irracional. Sean $n, m \in \mathbb{Z}$, $n \neq m$, $x \in S^1$ y $J \subset S^1$ intervalo cerrado con puntos extremos $f^n(x)$ y $f^m(x)$. Demuestre que para todo $y \in S^1$, $\mathcal{O}_f^+(y)$ intersecta J.
3. Construya ejemplos de funciones $f, g \in \mathrm{Homeo}_+(S^1)$ con número de rotación $\rho(f) = \rho(g) = p/q$, $(p, q) = 1$, tales que:
   (a) f tiene sólo una órbita periódica y todo punto no periódico es heteroclínico, bajo f^q, a dos puntos de la órbita periódica.
   (b) g tiene más de una órbita periódica y todo punto no periódico es heteroclínico, bajo g^q, a dos puntos de distintas órbitas periódicas.

   ¿Pueden ser f y g topológicamente conjugados?
4. Sea $K \subset X$ un conjunto mínimo del sistema dinámico topológico (X, f). Demuestre que $f|_K$ es topológicamente transitivo.

Definiciones:

- Un sistema dinámico topológico $f : X \to X$ es *topológicamente transitivo* si existe un punto $x \in X$ tal que $\mathcal{O}_f(x)$ es denso en X.
- Si dado $x \in X$ existen puntos $p, q \in X$ distintos y tales que

  $$\lim_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(p)) = \lim_{n\to-\infty} d(f^n(x), f^n(q)) = 0,$$

  entonces x es un punto *heteroclínico* a p y q. Si $p = q$, entonces x es *homoclínico*.

Fecha de entrega: Octubre 23, 2008 en clase.