Lección 8: 2ª Def Analítica

(ii) Supongamos $\partial_x \varphi, \partial_y \varphi \in L^1_{loc}(\mathcal{U})$. Llamemos $\boxed{f = \partial_x \varphi}$

Sea $Q = [a,b] \times [c,d] \subset \mathcal{U}$ dado. Como f es local/e integrable, por Fubini

$\exists E \subset [c,d]$ de medida cero tq $\forall y_0 \in [c,d] \setminus E$

$$f(x+iy_0) \in L^1_{loc}([a,b]).$$

Sea $Q_\eta = [a,b] \times [c,\eta]$ con $c < \eta < d$.

Sea $h(x+iy) = \psi(x)\,\theta(y) \in C_c^\infty(\mathcal{U})$ tal que ψ, θ tienen soportes en $[a,b]$, $[c,d]$ y son de clase C^∞. Tenemos

$$\iint_{Q_\eta} \varphi\, h_x\, dm = \iint_{Q_\eta} \varphi(x+iy)\,\psi'(x)\,\theta(y)\,dx\,dy$$

$$= - \iint_{Q_\eta} \underbrace{f(x+iy)}_{\partial_x \varphi}\,\psi(x)\,\theta(y)\,dx\,dy \quad , \text{ tomando } \theta(y) \equiv 1,$$

$$\int_c^\eta \int_a^b \psi'(x)\,\varphi(x+iy)\,dx\,dy = - \int_c^\eta \int_a^b \psi(x)\, f(x+iy)\,dx\,dy \quad , \text{ diferenciando c/r } \eta$$

(1) - - - $$\int_a^b \psi'(x)\,\varphi(x+i\eta)\,dx = - \int_a^b \psi(x)\, f(x+i\eta)\,dx \quad \text{p.c.t. } \eta \in]c,d[.$$
$$\forall \psi \in C_c^\infty([a,b]).$$

Llamemos $y = \eta \in [c,d]$. Sea $\xi \in]a,b]$ fijo y definamos las funciones

$$\psi_n(x) = \begin{cases} n(x-a) & a \le x \le a + \frac{1}{n} \\ 1 & a + \frac{1}{n} \le x \le \xi - \frac{1}{n} \\ n(\xi - x) & \xi - \frac{1}{n} \le x \le \xi \\ 0 & \xi \le x \le b. \end{cases}$$

Claramente $\varphi_n \in C_c^\infty([a,b])$. Substituyendo en (1) y tomando límite cuando $n \to \infty$ obtenemos del lado derecho

$$-\int_a^b \varphi_n(x) f(x+iy)\,dx \longrightarrow \int_a^\xi f(x+iy)\,dx = \int_a^\xi \partial_x \varphi(x+iy)\,dx.$$

Mientras que, $\varphi_n'(x) \neq 0$ si $a \le x \le a+\frac{1}{n}$ o $\xi - \frac{1}{n} \le x \le \xi$

$$\Rightarrow \int_a^b \varphi_n'(x)\varphi(x+iy)\,dx = \int_a^{a+\frac{1}{n}} n\varphi(x+iy)\,dx - \int_{\xi-\frac{1}{n}}^{\xi} n\,\varphi(x+iy)\,dx$$

$$\xrightarrow[\substack{n\to\infty \\ \text{(demostrarlo)}}]{} \varphi(a+iy) - \varphi(\xi+iy).$$

$$\therefore \quad \varphi(a+iy) - \varphi(\xi+iy) = \int_a^\xi \partial_x \varphi(s+iy)\,ds \quad \forall \xi \in]a,b]$$
$$y \in [c,d] \setminus E.$$

Tomando ramas se obtiene que φ es abs-continua en $a \le x \le b$ p.c.t. $y \in [c,d]$ y $\varphi_x = \partial_x \varphi$.

Por el tma anterior, se sigue que la Def 1. implica la def. 2, al observar que $L^2_{loc} \subset L^1_{loc}$.

Ahora, suponiendo que $\varphi: \mathcal{U} \to V$ satisface la 2ª Definición, entonces por ser ACL, φ_x, φ_y existen p.c.t. $z \in \mathcal{U}$.

$\Rightarrow$ ¿Son $\varphi_x, \varphi_y \in L^1_{loc}(\mathcal{U})$?

~~[illegible]~~

Si lo fueran, por el tma anterior se sigue $\varphi_x = \partial_x \varphi$, $\varphi_y = \partial_y \varphi$
en el sentido de distribuciones (ie cond. (2) se satisface).

Finalmente, como $J_\varphi = |\varphi_z|^2 - |\varphi_{\bar z}|^2$ existe y está bien def p.c.t $z \in \mathcal{U}$
combinando con cond. (3) de 2ª def. ($|\varphi_{\bar z}|^2 \le k|\varphi_z|^2$, $0 \le k \le 1$)

$$\Rightarrow \quad |\varphi_{\bar z}|^2 \le |\varphi_z|^2 \le \frac{J_\varphi}{1-k^2}$$

Como $J_\varphi \in L^1_{loc}$ (siempre y cuando $\varphi_z, \varphi_{\bar z} \in L^1_{loc}$) se sigue

$\partial \varphi, \bar\partial \varphi \in L^2_{loc}$ y satisfacen $\|\bar\partial \varphi\|_2 \le k \|\partial \varphi\|_2$

∴ ¿Cómo garantizamos φ_x, φ_y (ó $\varphi_z, \varphi_{\bar z}$) están en L^1_{loc}?

Requerimos
(i) $\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow V$ sea un mapeo abierto (manda abiertos en abiertos)

⇒ Tma (Gehring-Lehto)
$\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow V$ abierto, continuo, con φ_x, φ_y en ctp de $\mathcal{U}$.
Entonces φ es diferenciable p.c.t. $z \in \mathcal{U}$.
(ie, φ_x, φ_y existen y son cont. p.c.t. $z \in \mathcal{U}$).

Esto garantiza J_φ en ctp $z \in \mathcal{U}$.

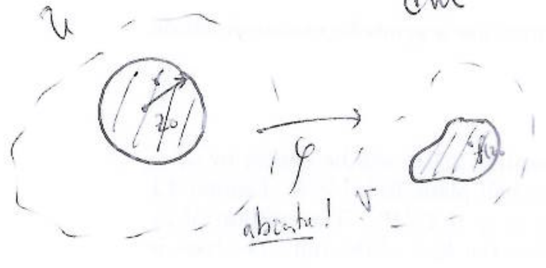
(ii) $\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow V$ ACL, homeom.
Definimos una medida positiva (de Borel) por

$$\lambda_\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \cup \{\infty\}$$
$$E \longmapsto \lambda_\varphi(E) := m(\varphi(E)) = \int_E \varphi \, dm.$$

¿Qué tanto "varía" λ_φ de m? $\lambda_\varphi = \lambda_a + \lambda_s$, $\lambda_a << m$ abs. cont.
$\lambda_s \perp m$ sing.

Calculemos su derivada Radon-Nikodym: dado $z_0 \in \mathcal{U}$ arb.

$$\frac{d\lambda_\varphi}{dm}(z_0) := \lim_{r\to 0} \frac{\lambda_\varphi(B(z_0,r))}{m(B(z_0,r))} = \lim_{r\to 0} \frac{\lambda_\varphi(B(z_0,r))}{\pi r^2}$$



$$= \lim_{r\to 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{B(z_0,r)} \varphi \, dm$$

donde $B(z_0,r) = \{z \mid |z-z_0| \le r\}$. Si φ es ~~diferenciable~~ ACL y abierta
$\Rightarrow$ Tma (G-L) implica φ es diferenciable y Lema 3.2 (Lehto-Virtanen)

$$\frac{\lambda_\varphi B(z_0,r)}{\pi r^2} \longrightarrow J_\varphi(z_0). \quad \text{p.c.t. } z_0 \in \mathcal{U}.$$

Por lo tanto, $\forall E \subset \mathcal{U}$ compacto,

$$\iint_E \frac{d\lambda_\varphi}{dm}\, dxdy = \iint_E J_\varphi \, dxdy = \lambda_\varphi(E) < +\infty. \qquad \lambda_\varphi(E) = m(\varphi(E))$$

ie, $J_\varphi \in L^1_{loc}(\mathcal{U})$

Lema 3.2 (LV)

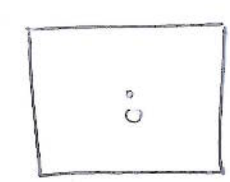
$f: \mathcal{U} \to f(\mathcal{U})$ diferenciable (ctp) $z \in \mathcal{U}$, f homeom.

Entonces $\frac{d\lambda_\varphi}{dm}(z) = J_\varphi(z)$ (ctp) $z \in \mathcal{U}$.

Γ $z_0 = 0$, $f(0) = 0$.

$Q \subset \mathcal{U}$ cuadrado ie $Q = Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$, $l(z_1,z_2) = l(z_2,z_3) = r > 0$.

con $0 \in Q$. Ya que f_x, f_y existen en $z_0 = 0$

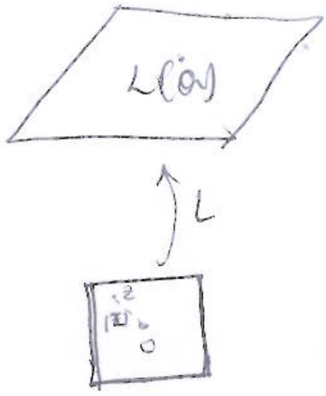


$$f(z) = L(z) + \varepsilon(r)$$

$L(z) = f_x(0)x + f_y(0)y$, parte lineal, $\varepsilon(r) = \sup_{0<|z|<2r} \left| \frac{f(z) - L(z)}{z} \right|$

$\boxed{\varepsilon(r) \longrightarrow 0 \text{ cuando } r \longrightarrow 0}$

L es una transf. lineal que envía Q en un ~~otrochiedro~~ rectángulo y fija $z_0=0$.



$$\Rightarrow \quad m_{Leb}(L(Q)) = \int_Q L\,dm = r^2 \cdot J_f(0),$$

$$J_f(0) = |L(0)|$$

$$\operatorname{diam}(L(Q)) = 4r \cdot M, \quad M = 2\left(|f_x(0)| + |f_y(0)|\right)$$ distorsión de los lados.

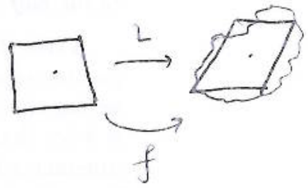
Para acotar $\int_Q f\,dm$ veamos que

$$\left| f(z) - L(z) \right| \le |z|\,\varepsilon(r) < 2r\,\varepsilon(r)$$

dif $\varepsilon(r)$

Q cuadrado, ~~...~~ $z_0 = 0 \in Q$.

$\Rightarrow \operatorname{dist}(\partial f(Q), \partial L(Q))$ es a lo más $2r\varepsilon(r)$



$$\therefore \int_Q (L - \varepsilon(r))\,dm \le \int_Q f\,dm \le \int_Q (L + \varepsilon(r))\,dm + \int_{B(0,2r\varepsilon(r))} dm$$

$$r^2 J_f(0) - \operatorname{diam}(L(Q)) \cdot 2r\varepsilon(r) \le m_{Leb}(fQ) \le r^2 J_f(0) + \operatorname{diam}(L(Q)) \cdot 2r\varepsilon(r) + 4\pi r^2 \varepsilon^2(r)$$

$$r^2\left(J_f(0) - 8M\varepsilon(r)\right) \le m_{Leb}(fQ) \le r^2\left(J_f(0) + 8M\varepsilon(r) + 4\pi\varepsilon^2(r)\right)$$

Dividiendo por r^2 y tomando el límite $r \to 0$

$$\frac{d f_*\mu}{dm}(z_0) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{\pi r^2}\, m_{Leb}(f(Q)) = \underset{??}{\frac{1}{\pi}} J_f(0)$$ upps!