CIMAT

90SSD01 — Mapeos Casiconformes y Dinámica Holomorfa — Octubre 19, 2010

Lista de temas

Estos son algunos temas disponibles para la exposición y trabajo final. Damos una breve descripción del problema y sus referencias bibliográficas.

Teorema de Componentes no Errantes (Sullivan)

El teorema afirma que si f es una aplicación racional de grado $d \geq 2$, entonces toda componente de Fatou es eventualmente periódica. La demostración de este teorema está basada en las *deformaciones casiconformes* de una función racional. Esto es, composiciones $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ donde φ es una aplicación casiconforme. La exposición deberá explicar a detalle la demostración del teorema haciendo hincapié en las deformaciones construídas. Además de los libros de Milnor, Carleson y Gamelin, otras referencias son

- D. Sullivan. *Quasiconformal homeomorphisms and dynamics. I. Solution of the Fatou-Julia problem on wandering domains.* Ann. of Math. (2) 122 (1985), no. 3, 401418.
- D. Sullivan. *Quasiconformal homeomorphisms in dynamics, topology, and geometry.* Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Berkeley, Calif., 1986), 12161228, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.

Existencia de Anillos de Herman (Shishikura)

Un anillo de Herman es una componente de Fatou anular, donde f está conjugada en su interior a una rotación irracional. A diferencia de las otras componentes de Fatou descritas en el Teorema de Clasificación, un anillo de Herman no está asociado a un punto periódico. Luego, no es fácil detectar si f tiene un anillo o no. M. Shishikura utiliza la *cirugía casiconforme* para construir ejemplos de funciones racionales que tienen anillos de Herman. Además del libro de Carleson y Gamelin, la referencia principal es

- M. Shishikura. *On the quasiconformal surgery of rational functions.* Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 20 (1987), no. 1, 129.

Movimientos Holomorfos (Mañé, Sad & Sullivan)

Un movimiento holomorfo de un conjunto arbitrario $J \subset \overline{\mathbb{C}}$ es una isotopía analítica de J parametrizada por un parámetro $\lambda \in \mathbb{D}$. Mañé, Sad y Sullivan dan condiciones suficientes para las cuales la isotopía puede extenderse para cada parámetro λ a una aplicación casiconforme. Este teorema explica porqué el conjunto de Julia de un polinomio $z \mapsto z^2 + c$ y su perturbación $z \mapsto z^2 + c + \epsilon$ son tan similares. Esta propiedad se conoce como *estabilidad del conjunto de Julia*.

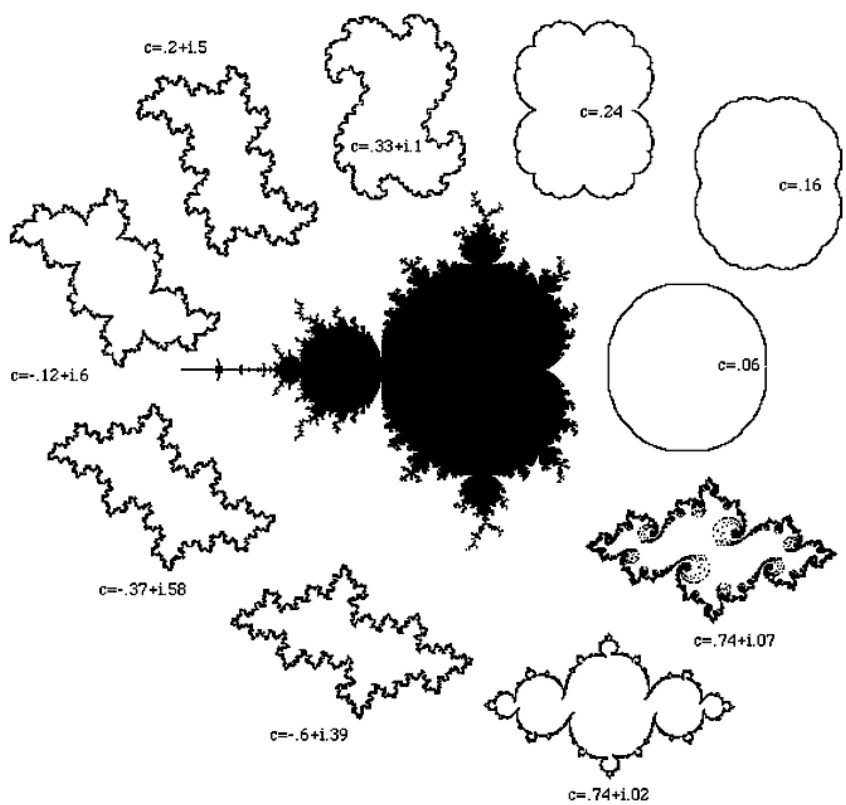

Figure 1: Estabilidad del conjunto de Julia para polinomios cuadráticos sobre la componente principal del Conjunto de Mandelbrot (Astala & Martin).

Se recomienda explicar con detalle el teorema de movimiento holomorfo [Astala & Martin] y explicar la estabilidad de conjuntos de Julia [MSS] para el caso polinomial.

- K. Astala, & Martin, G. J. *Holomorphic motions.* Papers on analysis, 2740, Rep. Univ. Jyväskylä Dep. Math. Stat., 83, Univ. Jyväskylä, Jyväskylä, 2001.
- A. Douady. *Prolongement de mouvements holomorphes (d'aprs Słodkowski et autres)* Séminaire Bourbaki, Vol. 1993/94. Astérisque No. 227 (1995), Exp. No. 775, 3, 720.
- R. Mañé; Sad, P.; Sullivan, D. *On the dynamics of rational maps.* Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 16 (1983), no. 2, 193217.

Acoplamiento de polinomios (Douady & Hubbard)

El *acoplamiento* de dos polinomios cuadráticos, denotado $P \amalg Q$, puede describirse como el resultado de la cirugía casiconforme aplicada a la dinámica de dos polinomios, de tal forma que la aplicación resultante es una función racional cuya dinámica hereda las propiedades de sus polinomios acoplados. El acoplamiento topológico se realiza por medio de la *teoría de rayos externos* de Douady & Hubbard mientras que la parte analítica del pegado se fundamenta en el Lema de Cirugía Casiconforme de Shishikura. Los artículos citados explican a detalle este proceso para ciertos ejemplos específicos. Se espera que se presente en la exposición los conceptos básicos de rayos externos (ver libro de Carleson & Gamelin), se explique el pegado casiconforme y la aplicación resultante.

- J. Milnor *Pasting together Julia sets: a worked out example of mating* Experiment. Math. 13 (2004), no. 1, 5592.
- M. Yampolsky & S. Zakeri *Mating Siegel quadratic polynomials.* J. Amer. Math. Soc. 14 (2001), no. 1, 2578.

Otros temas

Otros temas que pueden ser expuestos (aunque requieren platicar conmigo antes de empezar a trabajar en ellos) son:

- Estimación del número de ciclos según el teorema de Clasificación de Componentes de Fatou.
- Renormalización de polinomios.
- Espacios Teichmüller de funciones racionales.

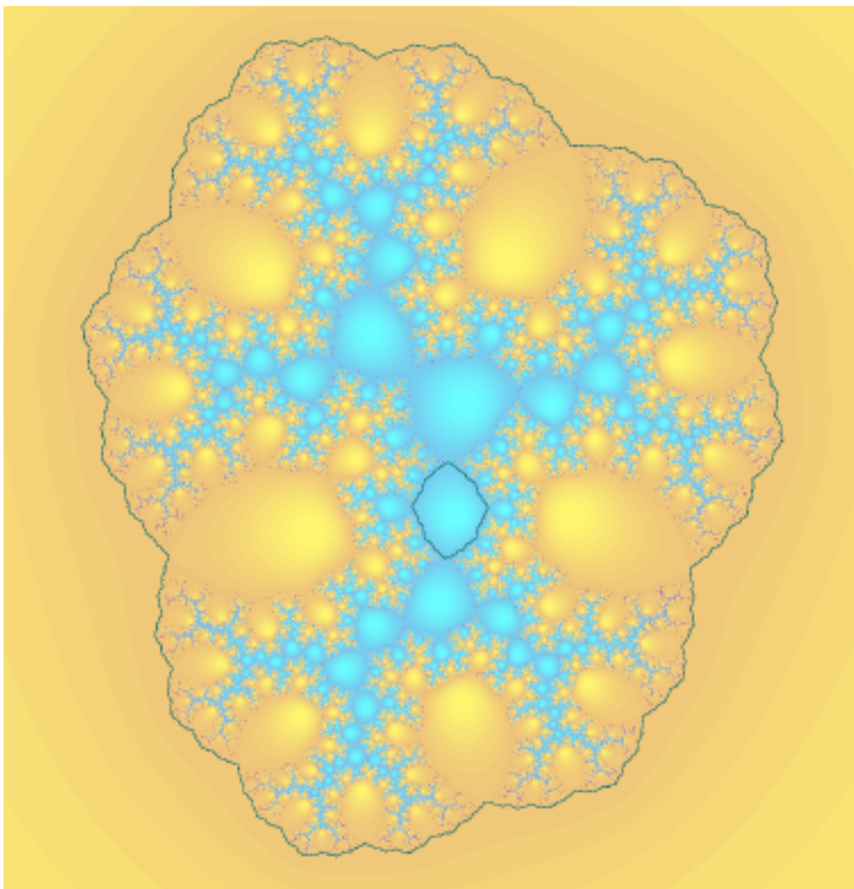

Figure 2: Conjunto de Julia del acoplamiento $P \amalg P$, con $P(z) = z^2 + c$ con un disco de Siegel (S. Zakeri).