CIMAT

90SSD01 — Mapeos Casiconformes y Dinámica Holomorfa — Agosto 17, 2010

Tarea 1

1. Sean $Q = Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ un rectángulo no degenerado de módulo conforme $M(Q) = a/b$ y denote por $\overline{\mathbb{H}^+}$ el semiplano superior cerrado. Para algún $0 < k < 1$ fijo, $\overline{\mathbb{H}^+}$ puede verse en la esfera de Riemann como el rectángulo
$$Q(-1/k, -1, 1, 1/k).$$
   (a) Usando la Fórmula de Schwarz–Christoffel, encuentre la transformación conforme que manda $\overline{\mathbb{H}^+}$ (visto como rectángulo) en Q y envía los "vértices" de $\overline{\mathbb{H}^+}$ en los vértices de Q.
   (b) Encuentre la relación entre k y el módulo conforme $M(Q)$.

2. Considere la forma cuadrática positiva
$$ds^2(z) = adx^2 + 2bdxdy + cdy^2,$$
con a, b, c constantes que satisface $a > 0, b^2 - ac < 0$. Demuestre que las curvas de nivel $ds^2(z) = r \geq 0$ determinan una familia de elipses en el espacio tangente que sólo difieren por escalamiento al variar r.

3. Sean $f : G \to f(G)$ y $g : f(G) \to \mathbb{C}$ ambos C^1–difeomorfismos, con coordenadas z en G y ζ en $f(G)$. Verifique las siguientes expresiones.
   (a) $J_f(z) = |f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2$.
   (b) $(g \circ f)_z = (g_\zeta \circ f)f_z + (g_{\bar{\zeta}} \circ f)\overline{f_{\bar{z}}}$
   (c) $(g \circ f)_{\bar{z}} = (g_\zeta \circ f)f_{\bar{z}} + (g_{\bar{\zeta}} \circ f)\overline{f_z}$
   (d)
$$(f^{-1})_\zeta \circ f = \frac{\overline{f_z}}{J_f} \quad \text{y} \quad (f^{-1})_{\bar{\zeta}} \circ f = \frac{-f_{\bar{z}}}{J_f}$$
   (e)
$$\mu_g \circ f = \left(\frac{f_z}{\overline{f_z}}\right) \frac{\mu_{g\circ f} - \mu_f}{1 - (\mu_{g\circ f})\overline{\mu_f}}$$

(f) Si g es conforme, concluya que $\mu_{g\circ f} = \mu_f$ y $D_{g\circ f} = D_f$.

(g) Si f es conforme, concluya que

$$\mu_g \circ f = (\mu_{g\circ f})\frac{\overline{f_z}}{f_z} \quad \text{y} \quad D_g \circ f = D_g$$

4. Considere de nuevo $f : G \to f(G)$ y $g : f(G) \to \mathbb{C}$ y suponga que f es K_1–casiconforme, mientras g es K_2–casiconforme. Demuestre que $g \circ f$ es un mapeo K_1K_2–casiconforme.

Lectura: Del libro de Ahlfors (*Lectures in Quasiconformal Mappings*), lean las secciones A, B, C y D del capítulo I. También consulten la desigualdad de Cauchy–Schwarz en espacios L^2 (por ejemplo, ver el libro de Rudin, *Real and Complex Analysis*).

Fecha de entrega: Agosto 24, 2010 en clase.