CIMAT

90SSD01 | Mapeos Casiconformes y Dinámica Holomorfa | Agosto 26, 2010

Tarea 2

1. Demuestre la Ley de Series con respecto al ancho extremo:

   Sean Γ_1 y Γ_2 dos familias de curvas disjuntas y Γ otra familia que desborda $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Demuestre que

   $$\mathcal{W}(\Gamma) \leq \mathcal{W}(\Gamma_1) \oplus \mathcal{W}(\Gamma_2).$$

2. Sea σ_s la métrica esférica sobre $\overline{\mathbb{C}}$ dada por

   $$\sigma_s = \sigma_s(z)|dz| = \frac{2|dz|}{1+|z|^2}.$$

   Sea Γ una familia de curvas radiales sobre el anillo $A = \{z \mid 1 \leq |z| \leq R\}$, con $R > 1$. Encuentre una normalización y escalamiento adecuado de σ_s tal que $\text{area}_{\sigma_s}(\overline{\mathbb{C}}) = \sigma_s(\Gamma)$.

3. Demuestre la Ley del Paralelo:

   Para cualesquier par de familias de curvas rectificables Γ_1 y Γ_2 se satisface

   $$\mathcal{W}(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \leq \mathcal{W}(\Gamma_1) + \mathcal{W}(\Gamma_2).$$

   Si además $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ entonces

   $$\mathcal{W}(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) = \mathcal{W}(\Gamma_1) + \mathcal{W}(\Gamma_2).$$

4. Sea $f : G \to f(G)$ un homeomorfismo entre dominios planos y tal que $f \in C^1$. Muestre que la primera definición de K–casiconformalidad (usando dilataciones) es equivalente a su definición geométrica (usando longitudes extremas).

5. Denote por $\Lambda \subset [0,1]$ el conjunto de tercio medio de Cantor. Defina la *Función de Cantor* $f : [0,1] \to [0,1]$ (o la función de la *escalera del diablo*) de la siguiente forma.

   Recuerde que el conjunto Λ consiste de todos los puntos $x \in [0,1]$ cuya representación en base 3 tiene la forma

   $$x = .x_1 x_2 \ldots x_n \ldots = \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{3^2} + \ldots + \frac{x_n}{3^n} + \ldots,$$

   con $x_n \in \{0,2\}$. Defina f como la única función no decreciente tal que para $x \in \Lambda$, $f(x)$ tiene representación en base 2

   $$f(x) = .\bar{x}_1 \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n \ldots = \frac{\bar{x}_1}{2} + \frac{\bar{x}_2}{2^2} + \ldots + \frac{\bar{x}_n}{2^n} \ldots,$$

   donde $\bar{x}_n$ es igual a 0 si $x_n = 0$ y 1 si $x_n = 2$.

   Demuestre que, aunque Λ tiene medida (de Lebesgue) cero,

   $$f(\Lambda) = [0,1].$$

Lectura: Del libro de Ahlfors (*Lectures in Quasiconformal Mappings*), lean la sección B del capítulo II. Una buena referencia para la continuidad absoluta sobre líneas (o ACL) y derivadas distribucionales la encontrarán en el capítulo 6 del libro de Rudin (*Functional Analysis*).

Fecha de entrega: Septiembre 7, 2010 en clase.