CIMAT

90CVO01 Variable Compleja Agosto 19, 2014

Bloque de ejercicios 1

1. Demuestra que la esfera de Riemann, $\widehat{\mathbb{C}}$, dotada con la métrica cordal, es un espacio métrico completo.

2. Deriva las ecuaciones de Cauchy-Riemann en su forma polar y en función de los operadores diferenciales

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

3. Demuestra que la función $f(z) = |z|$ no es holomorfa en cualquier punto del plano complejo. Además, usando la definición de derivada compleja, determina el conjunto límite del cociente cuando $h \to 0$.

4. Demuestra lo siguiente:

   (a) La serie $\sum_{n\geq 1} nz^n$ no converge en cualquier punto del círculo unitario.

   (b) La serie $\sum_{n\geq 1} z^n/n^2$ converge en todo punto del círculo unitario.

   (c) La serie $\sum_{n\geq 1} z^n/n$ converge en todo punto del círculo unitario excepto en $z = 1$.

5. Una función $f(z)$ es *analítica en* $z = \infty$ si la función $g(w) = f(1/w)$ es analítica en $w = 0$. Si $f(z)$ es analítica en ∞, demuestra que existe un valor $0 \leq R \leq \infty$ para el cual f tiene una expansión en series de potencia

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n},$$

   que es absolutamente convergente en $|z| > R$ y uniformemente convergente en $|z| > \rho$ para $\rho > R$.

6. A partir de la definición de integral de trayectoria, evalúa

   (a) para todo entero n, $\int_\gamma z^n dz$ cuando γ representa cualquier circunferencia con orientación positiva y centrada en el origen.

   (b) Para todo entero n, $\int_\gamma z^n dz$ cuando γ es cualquier circunferencia con orientación positiva y cuyo interior no contiene el origen.

(c) Si $|a| < r < |b|$ y γ es una circunferencia de radio r centrada en el origen y con orientación positiva, demuestra que

$$\int_\gamma \frac{dz}{(z-a)(z-b)} = \frac{2\pi i}{a-b}.$$

7. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio y $f \in \mathcal{C}(\Omega)$. Si f tiene dos primitivas en Ω, demuestra que éstas difieren a lo más por una constante.

Fecha de entrega: agosto 28, 2014 en clase.