CIMAT

90CVO01 Variable Compleja Agosto 28, 2014

Bloque de ejercicios 2

1. Una función $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es *armónica* si satisface la ecuación $\Delta\varphi = 0$, donde Δ es el operador de Laplace dado por

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right).$$

Demuestra que si f es holomorfa en un abierto Ω, entonces su parte real e imaginaria son funciones armónicas en su dominio de definición.

2. Sea f una función holomorfa en $0 < |z| < 1$ y tal que para todo círculo $\gamma_r : t \mapsto re^{it}$ con $0 < r < 1$, se satisface

$$\int_{\gamma_r} f(z)dz = 0.$$

Muestra por medio de un ejemplo que f no es necesariamente holomorfa en el origen.

3. Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Asumiendo que f' es una función continua en Ω, proporciona otra demostración al Teorema de Goursat aplicando el Teorema de Green sobre $T \subset \Omega$, un triángulo con $\mathrm{Int}(T) \subset \Omega$.

4. (a) Demuestra la siguiente versión del Teorema de Primitiva Local para el interior del contorno de bocallave descrito en clase:

   > Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Sea $\Gamma_{\delta,\epsilon}$ un contorno bocallave, tal que $\mathrm{int}(\Gamma_{\delta,\epsilon}) \subset \Omega$. Demuestra que f tiene una primitiva definida en $\mathrm{int}(\Gamma_{\delta,\epsilon})$.

   (b) Concluye que

$$\int_{\Gamma_{\delta,\epsilon}} \frac{f(z)}{w - z} dz = 0.$$

5. Demuestra que

$$\int_0^\infty \sin(x^2)dx = \int_0^\infty \cos(x^2)dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

Sug.: ver trayectoria sugerida en el libro de Stein & Shakarchi, pág. 64.

6. Calcular las integrales de línea

$$\int_C \frac{z^n}{z^2 - 2z} dz, n \geq 0, \quad \int_C \frac{e^z}{z^m} dz, -\infty < m < \infty, \quad \int_C \frac{\sin z}{z} dz,$$

donde C representa la circunferencia unitaria con orientación positiva y m, n son números enteros.

7. Una función f es *entera* si para cada $z_0 \in \mathbb{C}$, el radio de convergencia de su serie de potencias alrededor de z_0 en infinito. Demuestra que si f es entera y tal que para cada $z_0 \in \mathbb{C}$, al expresarla como

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n,$$

existe al menos un coeficiente nulo, entonces f debe ser un polinomio.

8. Demuestra que si u es una función armónica sobre $\mathbb{C}$ tal que es acotada por abajo, entonces u es constante.

Fecha de entrega: septiembre 9, 2014 en clase.