CIMAT

90CVO01 | Variable Compleja | Septiembre 9, 2014

Bloque de ejercicios 3

1. Sea $U : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ una función con parciales continuas de primer y segundo orden. Supongamos que U es armónica en $\mathbb{D}$. Demuestra que existe una función $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ tal que $\operatorname{Re}(f) = U$.

2. Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$. Decimos que un punto $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ es *regular* si existe una vecindad abierta U de ζ y una función $g \in \mathcal{H}(U)$ tal que $f \equiv g$ en $\mathbb{D} \cap U$.

   Demuestra que $f(z) = \sum_{n\geq 0} z^{2^n}$ definida en $|z| < 1$ es analítica, pero sin embargo, ningún punto de $\partial\mathbb{D}$ es un punto regular.

   Sug.: Escribe $z = re^{i\theta}$ con $\theta = 2\pi p/2^k$ con $p, k \in \mathbb{Z}^+$. Muestra $|f(z)| \to \infty$ a medida que $r \to 1$.

3. Demuestra que las funciones $f_n(z) = z^n/n$ convergen uniformemente en $\mathbb{D}$ pero en cambio, $f_n'(z)$ no convergen uniformemente en $\mathbb{D}$. ¿Este resultado contradice el Teorema de Convergencia Uniforme de Weierstrass? Explica.

4. Sea $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una función continua. Demuestra que

$$\mathcal{G}(z) = \int_0^1 g(t)e^{-itz}dt,$$

   es una función entera que satisface $|\mathcal{G}(z)| \leq Ce^{A|\operatorname{Im}(z)|}$ para ciertas constantes $A, C > 0$.

5. Sea Ω un dominio de $\mathbb{C}$ y f una función que es continua en Ω pero solo holomorfa en $\Omega - \mathbb{R}$. Demuestra que f admite una extensión analítica a todo Ω.

6. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio y $T \subset \Omega$ un triángulo con interior también contenido en Ω. Supongamos que f es holomorfa en $\Omega - \{z_0\}$, con $z_0 \in \operatorname{Int}(T)$. Demuestra que si f es acotada en una vecindad de z_0, entonces su integral sobre T es nula.

7. Usando el Teorema del Residuo, evalúa las integrales

$$\int_{|z|=2} \frac{z^n+1}{z^n-1}dz,\ n \geq 1, n \in \mathbb{Z} \qquad \text{y} \qquad \int_{|z-1/2|=3/2} \frac{\tan z}{z}.$$

Fecha de entrega: septiembre 23, 2014 en clase.