CIMAT

90CVO01 Variable Compleja Septiembre 23, 2014

Bloque de ejercicios 4

1. Si $U(z)$ es una función armónica definida en un domino $\Omega \subset \mathbb{C}$, y si el disco $|z - z_0| < \rho$ está contenido en Ω, demuestra que

$$U(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(z_0 + re^{i\theta}) d\theta,$$

para $0 < r < \rho$. En dicho caso, decimos que U satisface la *propiedad del valor medio.*

(Esta propiedad caracteriza a las funciones armónicas: $U \in \mathcal{C}(\Omega)$ es armónica si y sólo si satisface la propiedad del valor medio.)

2. Utiliza la caracterización anterior para demostrar lo siguiente: Sea Ω una región simétrica con respecto a $\mathbb{R}$. Si $U(z)$ es armónica (real-valuada) en Ω^+ y $U(z) \to 0$ cuando z converge a un punto de $\Omega \cap \mathbb{R}$ sobre Ω^+, entonces U tiene una extensión armónica a todo Ω y su extensión satisface $U(\bar{z}) = -U(z)$ para $z \in \Omega$.

3. Usando el Teorema del Residuo, evalúa las integrales

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + x^a}, \qquad \text{y} \qquad \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \cos\theta},$$

para $a > 1$ un número real.

4. Si f es analítica en el anillo abierto $A = \{z : 0 < R_1 < |z - z_0| < \infty\}$, completa la clasificación de $z_0 = \infty$ como singularidad aislada removible, polo o esencial de f dando la expresión en series de Laurent sobre A y proporciona un ejemplo ilustrativo para cada caso.

5. Si R es una función racional con un polo en el punto al infinito y $z_1, \ldots, z_N$ polos finitos, demuestra que

$$Res(R, \infty) + \sum_{k=1}^{N} Res(R, z_k) = 0.$$

6. Muestra que el polinomio $z^4 + 2z^2 - z + 1$ tiene exactamente una raíz en cada cuadrante del plano complejo.

7. Demuestra que si f es analítica en un dominio Ω y si $\gamma \subset \Omega$ es una curva simple cerrada para la cual, $f|\gamma$ toma valores en $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, entonces el incremento del argumento de f a lo largo de γ es cero.

8. Proporciona una nueva demostración del Teorema Fundamental del Álgebra haciendo uso del Teorema de Rouché.

Fecha de entrega: octubre 2, 2014 en clase.