CIMAT

90CVO01 Variable Compleja Octubre 2, 2014

Bloque de ejercicios 5

1. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio y $\{f_n\}$ una sucesión infinita de funciones holomorfas sobre Ω. Supón que f_n converge uniformemente a f en compactos de Ω. Si $f_n(z) \neq 0$ para toda $z \in \Omega$, demuestra que, ó $f \equiv 0$ ó $f(z) \neq 0$ para toda $z \in \Omega$.

   Sug.: Si $f \neq 0$ en Ω, procede por contradicción, analiza las sucesiones $1/f_n$, f_n' en la vecindad de un cero de f y aplica el Principio del Argumento.

2. Demuestra el corolario al Teorema de Rouché presentado en clase.

3. Sea f una función holomorfa y no constante en un abierto Ω y donde $\overline{\mathbb{D}} \subset \Omega$. Demuestra que si $|f(z)| = 1$ para cuando $|z| = 1$, entonces $\mathbb{D} \subset f(\Omega)$.

   Sug.: Muestra que $f(z) = w_0$ tiene solución para cada $w_0 \in \mathbb{D}$ y usa el Principio de Módulo Máximo.

4. Sea f una función holomorfa definida en $\Omega \subset \mathbb{C}$, un dominio. Sea $z_0 \in \Omega$ fijo y denota por $w_0 = f(z_0)$. ¿Bajo qué condiciones sobre f puedes definir una inversa local $g : D(w_0, r) \to \mathbb{C}$ de f, de tal forma que $g(f(z_0)) = z_0$? ¿Es g necesariamente holomorfa?

5. Enuncia y proporciona una demostración a la Fórmula Integral de Cauchy cuando la integración se realiza sobre una curva cerrada que no es necesariamente simple.

6. Sea f una función holomorfa con un cero en z_0 de orden $m > 0$. Demuestra que existe un disco abierto centrado en z_0 en el cual se puede definir una rama univalente de $f^{1/m}$.

7. Calcula la función meromorfa $f(z)$ más simple posible la cual tiene polos únicamente en los enteros y, si $\mathcal{P}_n(z)$ denota la parte principal de $f(z)$ en el polo n, entonces $\mathcal{P}_n(z) = z$ para todo n.

8. Para $|z| < |a|$, verifica la expresión

$$\frac{1}{(z-a)^m} = (-a)^{-m} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} m(m+1)\cdots(m+k-1) \left(\frac{z}{a}\right)^k.$$

Fecha de entrega: **octubre 16,** en clase.