CIMAT

90CVO01 Variable Compleja Octubre 16, 2014

Bloque de ejercicios 6

1. Demuestra el Principio del Módulo Máximo para funciones armónicas:

   (a) Si u es una función no constante, real-valuada y armónica en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$, entonces u no puede alcanzar su módulo máximo (o mínimo) en Ω.

   (b) Si Ω es un dominio con clausura compacta en $\mathbb{C}$. Si u es armónica en Ω y continua en $\overline{\Omega}$, entonces $\sup_{z\in\Omega} |u(z)| \leq \sup_{z\in\overline{\Omega}-\Omega} |u(z)|$.

2. Demuestra que $\Omega \subset \mathbb{C}$ es simplemente conexo si y sólo si, para cada $z_0 \in \mathbb{C} - \Omega$, existe una rama analítica de $\log(z - z_0)$ definida en Ω.

3. Verifica que $\pi^2/\mathrm{sen}^2(\pi z)$ tiene una representación en partes principales dada por
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}.$$
Sug.: Procede como en el libro de Stein & Shakarchi al verificar la expresión en partes principales de $\pi\cot(\pi z)$.

4. Construye una función entera que tenga ceros simples únicamente en los puntos n^2, para $n = 0, 1, 2, \ldots$.

5. Sabemos que toda función racional (meromorfa en $\widehat{\mathbb{C}}$) puede escribirse como el cociente de dos polinomios. Demuestra que toda función meromorfa del plano complejo puede escribirse como el cociente de dos funciones enteras.

Fecha de entrega: octubre 23, en clase.