CIMAT

90CVO01 | Variable Compleja | Octubre 23, 2014

Bloque de ejercicios 7

1. Demuestra que toda función entera e inyectiva se reduce a una función lineal de la forma $z \mapsto \alpha z + \beta$, para $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

2. Sea $\varphi : U \to V$ una equivalencia conforme entre dominios $U, V \subset \mathbb{C}$. Si U es simplemente conexo, demuestra que V debe ser simplemente conexo.

3. Para $j = 1, 2$ sean $\gamma_j : [a, b] \to \Omega$ curvas suaves distintas con un punto en común $\gamma_j(b) = z_0$ y donde $\gamma_j'(b) := \lim_{t\to b^-} \gamma_j'(t)$ existe y es distinto de cero.

   Si $f : \Omega \to \Omega'$ es una biyección conforme entre dos dominios, demuestra que f preserva ángulos: esto es, las curvas $f \circ \gamma_1$ y $f \circ \gamma_2$ tienen vectores tangentes no nulos en $f(z_0)$ y forman el mismo ángulo que los vectores $\gamma_1'(b)$ y $\gamma_2'(b)$.

4. Una función holomorfa $f : U \to V$ es una *biyección local* en U si para cada $z \in U$ existe un disco abierto $D \subset U$ centrado en z tal que $f : D \to f(D)$ es una biyección. Sea $f : U \to V$ una función holomorfa. Demuestra que f es una biyección local en U si y sólo si $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in U$.

5. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un dominio no vacío. Denota por $\mathrm{Aut}(\Omega)$ el conjunto de *automorfismos de* Ω, esto es, todas las biyecciones conformes $f : \Omega \to \Omega$.

   (a) Demuestra que $\mathrm{Aut}(\Omega)$ es un grupo con la operación de composición.

   (b) Considera la topología de convergencia uniforme en compactos sobre $\mathrm{Aut}(\Omega)$. Proporciona un ejemplo de un dominio para el cual $\mathrm{Aut}(\Omega)$ no es compacto.

   (c) Dado $\Omega' \subseteq \mathbb{C}$ otro dominio y $\varphi : \Omega \to \Omega'$ conforme (si se desea, una biyección) describe la relación que φ determina entre $\mathrm{Aut}(\Omega)$ y $\mathrm{Aut}(\Omega')$.

6. Demuestra las siguientes propiedades de las transformaciones de Möbius.

   (a) Si f tiene tres puntos fijos, entonces f es la identidad.

   (b) Dadas dos transformaciones f y g para las cuales, existen tres puntos distinto $z_1, z_2, z_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$ tales que $f(z_j) = g(z_j)$, entonces $f = g$.

7. Calcula una transformación de Möbius que envía el disco unitario al semiplano $A = \{z \ : \ \mathrm{Re}(z) > \mathrm{Im}(z)\}$. Analiza el comportamiento de la transformación en la frontera de ambos conjuntos.

8. Construye una familia uniparamétrica de transformaciones de Möbius que envían la línea real al círculo unitario de tal forma que cada transformación envía $0, t, \infty$ a $-i, 1, i$ (donde $t \in \mathbb{R}, t \neq 0$).

   (a) Determina los valores de t para los que el semiplano superior, $\mathbb{H}^+ := \{z \in \mathbb{C} \ : \ \mathrm{Im}(z) > 0\}$, es enviado a $\mathbb{D}$ ó a $\{z \ : \ |z| > 1\}$.

   (b) Si $f \in$ Möb es tal que envía $\mathbb{R}$ a S^1, ¿debe f pertenecer a la familia uniparamétrica que has calculado? Argumenta tu respuesta.

Fecha de entrega: noviembre 11, en clase.