CIMAT

90CVO01 Variable Compleja Noviembre 11, 2014

Bloque de ejercicios 8

1. Demuestra que $\mathbb{C}$ no puede ser conformemente equivalente a un dominio acotado del plano.

2. Proporciona una demostración para la siguiente versión del Lema de Schwarz: Sea $f : D(z_0, R) \to D(0, M)$, $f \in \mathcal{H}(D(z_0, R))$ y $f(z_0) = 0$. Entonces

   (a) $|f(z)| \leq M|z - z_0|/R$ para todo $z \in D(z_0, R)$.

   (b) Si existe $z_1 \in D(z_0, R)$ tal que $|f(z_1)| = M|z_1 - z_0|/R$ entonces $f(z) = c(z - z_0)$ para algún $c \in \mathbb{C}$.

3. Considera la transformación de Möbius

$$\psi_\theta(z) = \frac{z \cos\theta - \sin\theta}{z \sin\theta + \cos\theta},$$

   para algún $\theta \in \mathbb{R}$. Si $F : \mathbb{H} \to \mathbb{D}$ es la equivalencia conforme $z \mapsto (i - z)/(i + z)$, verifica que $F \circ \psi_\theta \circ F^{-1}$ es la rotación $z \mapsto e^{-i2\theta} z$.

4. Sea $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorfa.

   (a) Demuestra que si f tiene dos puntos fijos distintos, entonces f es la identidad en $\mathbb{D}$.

   (b) ¿Es verdad que toda función holomorfa $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ tiene un punto fijo? Demuestra o proporciona un contraejemplo.

5. Considera la familia de funciones analíticas

$$\mathcal{F} = \{f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \mid f_n(z) = z^{2^n},\ n \geq 1\}.$$

   Calcula los dominios máximos de normalidad de $\mathcal{F}$, esto es, calcula los dominios $\Omega \subset \mathbb{C}$ donde $\{f_n|\Omega\}_{n\geq 1}$ forman una familia normal.

Fecha de entrega: noviembre 20, en clase.