CIMAT

90CVO01 Variable Compleja Noviembre 20, 2014

Problema de crédito extra

Para garantizar dos puntos extra para el segundo examen parcial, tu trabajo debe satisfacer:

- La resolución correcta de todos los incisos descritos abajo, pues no habrá crédito parcial.
- Que tu trabajo sea original. Esto es, no debe basarse/copiarse de material bibliográfico –físico o electrónico– que responda parcial o totalmente las preguntas.
- Escribir tus respuestas de forma legible y con ortografía correcta.
- Puedes hacer uso de los resultados vistos en clase y en las tareas.

Fecha de entrega: a partir del 5 y hasta el 11 de diciembre, 17.00 horas.

1. (Longitud Extrema) Considera el anillo $A_R = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < R\}$ para $1 < R < +\infty$ y denota por Γ una familia de curvas C^1 a trozos que conectan ambas fronteras. Demuestra lo siguiente:
   (a) La función $\tilde{\rho}(z) = |z|^{-1}$ para $z \in A_R$ y $\rho(z) = 0$ para $z \in \mathbb{C} \setminus A_R$, es medible y tiene área finita.
   (b)
   $$\frac{(L_{\tilde{\rho}}(\Gamma))^2}{A_{\tilde{\rho}}} = \frac{\log(R)}{2\pi}$$
   (c) $\lambda(\Gamma) = \frac{\log(R)}{2\pi}$, esto es, $\tilde{\rho}|dz|$ es la métrica extrema para Γ.

2. (Automorfismos) Para los valores $0 < a < b < \infty$ considera el anillo
   $$A_{a,b} = \{z \in \mathbb{C} \mid a < |z| < b\}.$$
   (a) Encuentra la transformación conforme entre $A_{a,b}$ y $A_{1,R}$.
   (b) Demuestra que todos los automorfismos de $A_{a,b}$ (esto es, biyecciones holomorfas de $A_{a,b}$ en sí mismo) se reducen a rotaciones, $z \mapsto e^{i\theta}z$, ó a rotaciones compuestas con una inversión de la forma $z \mapsto ab/z$.
   (c) Describe la representación geométrica de $\mathrm{Aut}(A_{a,b})$.

Utiliza la siguiente generalización del Principio de Reflexión de Schwarz para calcular los automorfismos de $A_{a,b}$.

Conceptos:

- Una curva γ se dice *analítica* si cada punto en γ tiene un vecindad abierta, U, conformemente equivalente a un disco $D = D(x_0, r)$ con $x_0 \in \mathbb{R}$ y $r > 0$ suficientemente pequeño. Si $\varphi : D \to U$ denota dicha aplicación conforme, entonces $\varphi(D \cap \mathbb{R}) = U \cap \gamma$.

- La conjugación compleja $z \mapsto \bar{z}$ en D induce una transformación $z \mapsto z^*$ en U dada por $a^* := \varphi(\overline{\varphi^{-1}(a)})$, $a \in U$. Llamamos $z \mapsto z^*$ la *reflexión a través de* γ. Esta reflexión satisface

  1. $z^* = z$ si y sólo si $z \in \gamma$.
  2. $z \mapsto z^*$ intercambia las componentes de $U \setminus \gamma$.
  3. $z \mapsto z^*$ es *anticonforme*, esto es, es holomorfa e inyectiva pero invierte orientación.

Reflexión a través de arcos analíticos:

El Principio de Reflexión de Schwarz puede extenderse para reflexiones a través de arcos analíticos (ver, por ejemplo, S. Lang, *Complex Analysis*, cáp. IX). Así, si $w = f(z)$ es una función holomorfa definida en una componente de $U \setminus \gamma$, continua en γ y si $w_n = f(z_n)$ convergen a un arco analítico $f(\gamma)$ a medida que z_n convergen al arco γ, entonces f se extiende de forma analítica a través de γ y la extensión satisface

$$f(z^*) = (f(z))^*,$$

para todo $z \in U$.