Variable Compleja 2
Teorema del Cociente
Owen Yael Mireles Briones

Este adendo es para enunciar correctamente el Lema utilizado en la demostración de que D/G es superficie de Riemann. Además, después, se detalla la construcción de las cartas, que también quedó no muy transparente durante la exposición.

El lema, con el enunciamiento correcto, es:

Lema 5.3.3 Suponer que G es no elemental y que $\Omega \neq \emptyset$. Si $z \in \Omega$, entonces el estabilizador G_z es cíclico y finito, y el generador es elíptico.

Demostración. Recordemos que Ω es el dominio maximal donde G actúa discontinuamente.

Entonces, sea $z \in \Omega$. En principio, y de momento, no tiene que ser punto fijo de nada. Nos fijamos en $g \in G_z$. Por definición, ahora sí, $g(z) = z$ (y entonces el error fue muy bobo, porque se me pasó recordar que trabajábamos con elementos del estabilizador).

Entonces, si $f, g \in G_z$, tanto f como g fijan a z. Además, recordemos que f, g son elípticas, pues de lo contrario no actuarían discontinuamente (lema visto en la exposición). Entonces, por otro lema visto, o ambas conmutan y comparten puntos fijos, o $[f, g]$ es una transformación parabólica.

Si conmutan, son simultáneamente diagonalizables, por lo que vemos que los elementos del grupo son de la forma $h(z) = kz$, con $|k| = 1$. Y este grupo debe ser cíclico finito, o de lo contrario no actúa discontinuamente.

Si no conmutan, como $[f, g]$ tiene a z como punto fijo, también es cierto que $[f, g]^n \in G_z$. Por lo visto, el orden de una transformación parabólica no es finito. Entonces el estabilizador sería de cardinalidad infinita, lo que viola que G actúa discontinuamente.

Veremos otro lema que se requiere para la demostración final.

Lema. Sea $D \subset \mathbb{C}$ un dominio y sea G un grupo de transformaciones de Möbius que actúa discontinuamente sobre D. Entonces, para $z \in D$ existe un disco N_z tal que

$$g(N_z) = N_z \text{ , si } g(z) = z;$$
$$g(N_z) \cap N_z = \emptyset, \text{ si } g(z) \neq z.$$

Demostración.

Sea $z \in D$ y sea B un disco centrado en z cuya cerradura está contenida en D. Como B es compacto, tenemos que $g(B) \cap B = \emptyset$ salvo por finitos $g_1, g_2, ..., g_n$. Entonces, si $g_i(z) \neq z$, por continuidad existe un $r_i > 0$ tal que $g_i(r_i B) \cap (r_i B) = \emptyset$ (hacemos la bola lo suficientemente pequeña para no exista intersección). Luego, sea r el mínimo de los r_i y sea $N_z = rB$. Resta ver que $g(N_z) = N_z$ si g tiene a z como punto fijo. Si $g \in G_z$, entonces podemos conjugarla para que parezca una rotación. Notamos que conjugar por transformaciones de Möbius preserva discos generalizados, entonces así, viendo que $g(N_z)$ es hacer una rotación de un disco (y recordando que usamos al 0 como el punto fijo), concluimos que $g(N_z) = N_z$ en el otro caso.

Ahora sí podemos concluir construyendo las cartas de la superficie de Riemann.

El teorema a probar es:

Teorema. Sea $D \subset \mathbb{C}$ un dominio y sea G un grupo de transformaciones de Möbius que dejan a D invariante y actúa discontinuamente sobre D. Entonces D/G es superficie de Riemann.

Demostración. En clase vimos que D/G es conexo y Hausdorff. Resta dar un atlas.

Sea $z \in D$. Sea $N_z \subset D$ un disco centrado en z tal que

$$g(N_z) = N_z \text{ , si } g(z) = z;$$

$$g(N_z) \cap N_z = \emptyset, \text{ si } g(z) \neq z.$$

En clase vimos, entonces, que $N_z \backslash z$ no tenía puntos fijos de G.

Sea σ la transformación de Möbius que mapea a z a 0 y a N_z a $\mathbb{D}$. Supongamos que el estabilizador de z es de orden n, y que su generador es g. Entonces la conjugación $\sigma g \sigma^{-1}$ es de la forma $\sigma g \sigma^{-1}(w) = we^{2i\pi/n}$, pues así la elíptica $\sigma g \sigma^{-1}$ tiene a 0 como punto fijo y entonces es rotación.

Notemos que si $q(w) = w^n$, entonces para toda $k \in \mathbb{N}$ y $w \in N_z$, tenemos:

$$\begin{aligned} q\sigma g^k(w) &= \left[\sigma g^k \sigma^{-1}(\sigma w)\right]^n \\ &= \left[\sigma(w) e^{2i\pi k/n}\right]^n \\ &= \sigma(w)^n \end{aligned}$$

Y también observemos que la elección de k fue arbitraria.

Con esto, tomemos como cartas de D/G a los pares $(q\sigma(\pi_z)^{-1}, \pi_z(N_z))$, donde se está usando la preimagen. Notemos que $\pi_z(N_z)$ es abierto en D/G y que $q\sigma(\pi_z)^{-1} : \pi_z(N_z) \subset D/G \to \mathbb{D} \subset \mathbb{C}$.

Ahora analicemos la preimagen de un punto w en $\pi_z(N_z)$. Por la construcción de N_z, los únicos puntos de D que se proyectan a w son aquellos que están en la órbita generada por el estabilizador de algún punto preimagen de w. Es decir, si $w \in D/G$, entonces existe un $\alpha \in D$ tal que $g(\alpha), g^2(\alpha), ..., g^n(\alpha)$ son los únicos puntos que se proyectan a w (usando que g genera al estabilizador y que su orden es n). Pero, por lo anteriormente visto, entonces $q\sigma$ envía a estos n puntos al mismo punto en $\mathbb{D}$. Luego, logramos una biyección entre $\pi_z(N_z) \subset D/G$ y $\mathbb{D}$, por cómo se construyó. La continuidad de $q\sigma(\pi_z)^{-1}$ es directa; la continuidad de la inversa se debe a que las funciones holomorfas son abiertas y la proyección también lo es.

Resta ver la holomorficidad de las funciones $(q\sigma(\pi_z)^{-1}) \circ (q\sigma(\pi_w)^{-1})^{-1}$. Para esto, primero nos fijaremos en las funciones $(\pi_w)^{-1} \circ \pi_z$. Supongamos que existen u, v, x tales que $\pi_z(u) = \pi_w(v) = x$, entonces hay un $h \in G$ con $v = h(u)$. Si v no es punto fijo del generador elíptico, entonces π_w es inyectiva en una vecindad de v (recordar que la preimagen de la proyección es de la forma g^k), por lo que π_w^{-1}, la inversa, existe. En esta vecindad, tenemos que $\pi_z = \pi_w \circ h$, pues, ambas coinciden con la proyección (aplicar primero h no afecta a la proyección, pues justamente es sobre las órbitas). Luego, $pi_w^{-1} \circ \pi_z = h$, lo cual prueba la holomorficidad. Y esto ocurre en puntos que no son fijos del generador. Entonces, para ver que $(q\sigma(\pi_z)^{-1}) \circ (q\sigma(\pi_w)^{-1})^{-1}$ es holomorfa, usamos lo visto de la proyección y usamos que tenemos un homeomorfismo previamente, entonces las posibles singularidades son removibles, por Teorema de Riemann.

Así construimos un atlas y D/G es superficie de Riemann.