MAT510 Variable Compleja II Agosto 18, 2017

Lista 1[1]

Notación: Para $a \in \mathbb{C}$ y $r > 0$, define $D(a,r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < r\}$. Así $\mathbb{D}$ denota el disco $D(0,1)$. El semiplano superior $\mathrm{Im}(z) > 0$ es denotado por $\mathbb{H}$. La clase de equivalencia de continuación analítica asociada a un elemento función (f,U) es denotada por $\mathfrak{f}$.

Repaso

1. Demuestra la siguiente versión del Lema de Schwarz:

   > Sean a y b puntos arbitrarios de $\mathbb{C}$ y sean r y s números reales positivos. Demuestra que para toda función holomorfa $f : D(a,r) \to D(b,s)$ con $f(a) = b$, se cumple $|f'(a)| \leq s/r$.

2. Sea $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ una función holomorfa.

   (a) Demuestra que para toda $a \in \mathbb{D}$ se cumple

   $$\frac{|f'(a)|}{1-|f(a)|^2} \leq \frac{1}{1-|a|^2}.$$

   (b) Prueba que para cada a y b en $\mathbb{D}$, se satisface

   $$\left|\frac{f(a)-f(b)}{1-f(a)\overline{f(b)}}\right| \leq \left|\frac{a-b}{1-a\bar{b}}\right|.$$

   Estas desigualdades son conocidas como el Lema de Schwarz-Pick.

3. Sea $g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ una función holomorfa. Demuestra que para toda $a \in \mathbb{H}$ se cumple

   $$|g'(a)| \leq \frac{\mathrm{Im}\ g(a)}{\mathrm{Im}\ a}.$$

4. Demuestra que para todo z y w en $\mathbb{D}$, existe una función $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ que satisface $f(z) = w$ (esto es, demuestra que $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ actúa transitivamente en $\mathbb{D}$).

[1] Esta es una lista parcial. Los problemas asociados al principio de reflexión de Schwarz y extensiones analíticas a través de arcos analíticos serán añadidos la próxima semana.

5. Sea $h : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ una función holomorfa que envía $\mathbb{D}$ a $\mathbb{D}$ y $\partial\mathbb{D}$ a $\partial\mathbb{D}$. Demuestra que existen puntos $a_1, a_2, \ldots, a_d$ (no necesariamente distintos) en $\mathbb{D}$ y $\theta \in [0,1]$ tal que
$$h(z) = e^{i2\pi\theta} \prod_{j=1}^{d} \frac{z - a_j}{1 - \overline{a_j} z}.$$
Estas funciones son conocidas como productos Blaschke de grado d.

Superficies de Riemann Elementales

6. Describe la superficie de Riemann (como en el libro de Ahlfors, capítulo 4 sección 3) asociada con las siguientes funciones:
   (a) $w = (z + z^{-1})/2$.
   (b) $w = (z^2 - 1)^2$.
   (c) $w = z^2 - 3z$.

Continuación Analítica

7. ¿Es cierto que el Teorema de Identidad se satisface para funciones armónicas? Demuestra o proporciona un contraejemplo.

8. Proporciona un ejemplo de un elemento función (f, U) la cual no tiene ninguna continuación analítica directa salvo aquellas dadas por la restricción de f en subdiscos de U.

9. Demuestra que con la definición de vecindad de un elemento $(f, U) \in \mathfrak{f}$ dada en clase, $\mathfrak{f}$ se transforma en un espacio topológico (denotado por $S_{\mathfrak{f}}$).

10. Construye la superficie de Riemann $S_{\mathfrak{f}}$ asociada a la función elemento $(f, U) = (\log(z), D(1,1))$.