Lista 2

Notación: ρ_0 denota _la_ metrica de Poincaré en $\mathbb{D}$, el disco unitario, ρ denota una métrica conforme definida sobre un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Toda curva $\gamma \subset \Omega$ es C^1 ó C^1 a trozos. El conjunto $\Gamma_{z,w}$ es el conjunto de todas las curvas $\gamma : [0,1] \to \Omega$ que satisface $\gamma(0) = z$ y $\gamma(1) = w$. La longitud de la curva γ con respecto a una métrica conforme ρ se denota por $\ell_\rho(\gamma)$.

Geometría conforme en $\mathbb{D}$

Métricas conformes

1. Demuestra que la función $d_\rho : \Omega \times \Omega \to [0, \infty)$ dada por
$$d_\rho(z, w) = \inf\{\ell_\rho(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma_{z,w}\},$$
define una métrica en Ω.

2. Sean (Ω_2, ρ) un dominio dotado de una métrica conforme y $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ una función holomorfa. Demuestra que para toda curva $\gamma \subset \Omega_1$ se cumple
$$\ell_{f^*\rho}(\gamma) = \ell_\rho(f_*\gamma).$$

3. Sea $f : (\Omega_1, \rho_1) \to (\Omega_2, \rho_2)$ un biholomorfismo entre dominios dotados de métricas conformes. Demuestra que f y f^{-1} son isometrías con respecto a ρ_1 y ρ_2, y en consecuencia, para todo $z, w \in \Omega_1$,
$$d_{\rho_1}(z, w) = d_{\rho_2}(f(z), f(w)).$$

Disco de Poincaré

4. Sea $\{z_k\}_{k\geq 1}$ una sucesión infinita en $\mathbb{D}$. Demuestra que $\{z_k\}$ converge a un punto $z_0 \in \mathbb{D}$ con respecto a ρ_0 si y sólo si $\{z_k\}$ converge a $z_0 \in \mathbb{D}$ con respecto a la métrica Euclideana.

5. Demuestra que $(\mathbb{D}, \rho_0)$ es un espacio métrico completo.

6. Sean $f, g : (\mathbb{D}, \rho_0) \to (\mathbb{D}, \rho_0)$ dos isometrías que satisface lo siguiente: para un $z_0 \in \mathbb{D}$, $f(z_0) = g(z_0)$ y $f'(z_0) = g'(z_0)$. Demuestra que $f \equiv g$ en $\mathbb{D}$.

Dominios hiperbólicos

7. Considera el biholomorfismo $F : \mathbb{H} \to \mathbb{D}$ dado por $w = F(z) = (i-z)/(i+z)$. Demuestra lo siguiente:
   (a) Para todo $w \in \mathbb{D}$,
   $$F^*\rho_0(w) = \frac{1}{2|\mathrm{Im}(w)|}.$$
   (b) Para $z \in \mathbb{H}$ define $\sigma(z) := (2\ \mathrm{Im}(z))^{-1}$, la métrica hiperbólica sobre el semiplano superior. Demuestra que para $0 < p < q$,
   $$d_\sigma(ip, iq) = \log\left(\frac{q}{p}\right).$$
   (c) Demuestra que el grupo de isometrías de $\mathbb{H}$ con respecto a la métrica σ es isomorfo a $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$.

8. Para dos puntos $p, q \in \mathbb{H}$, denota por $\gamma_{p,q}$ la geodésica con respecto a σ que minimiza la distancia entre p y q. Si $z \in \mathbb{H}$ que no está sobre $\gamma_{p,q}$, muestra que al menos existen dos geodésicas que pasan por z y que no intersectan $\gamma_{p,q}$ (esto es, el quinto postulado de Euclides no se satisface para $(\mathbb{H}, \sigma)$).

9. Considera el dominio $B = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \mathrm{Re}(z) < \pi\}$. Demuestra que B es un dominio hiperbólico y calcula la expresión de su métrica hiperbólica.

10. Repite el ejercicio anterior para $Q = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \arg(z) < \pi/2\}$ y $S = \{z \in \mathbb{C} \mid -\pi/2 < \arg(z) < \pi/2, |z| < 1\}$.

Grupos Fuchsianos

11. Demuestra que las acciones de multiplicación y tomar inversas son continuas con respecto a la topología en $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$.

12. Demuestra que toda transformación en $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ puede escribirse de la forma TK, donde $T : z \mapsto az + b$ para $a, b \in \mathbb{R}, a > 0$, y K es un elemento elíptico con punto fijo en i. Con esto, deduce que $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^2 \times S^1$ y concluye la descomposición de Iwasawa de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ para $n = 2$.

13. Demuestra que $\Gamma < \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ es Fuchsiano si y sólo si para toda sucesión $T_k \in \Gamma$ con $T_k \to Id$, esto implica $T_k = Id$ para k suficientemente grande.

14. Proporciona un ejemplo de un subgrupo de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ que no sea Fuchsiano.