MAT510 Variable Compleja II Octubre 6, 2017

Lista 3

Notación: $\mathcal{F}$ denota una familia de funciones holomorfas definidas sobre un mismo dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$. Denota por $C^0 = C^0(\Omega, \mathbb{C})$ el conjunto de funciones continuas definidas en Ω y que toman valores complejos. Similarmente, define $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Omega, \mathbb{C})$. El semiplano superior es denotado por $\mathbb{H}$ y $|\cdot|$ es la norma euclideana en el plano complejo.

Familias Normales

1. Si $\mathcal{F}$ es normal, demuestra que $\mathcal{F}$ es uniformemente acotada en conjuntos compactos.

2. Dados $z, w \in \mathbb{C}$, define la función $d_0 : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to [0, \infty)$ por

$$d_0(z, w) = \frac{|z - w|}{1 + |z - w|}.$$

   Demuestra que d_0 es una métrica.

3. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y $\{K_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una extenuación compacta de Ω. Define la función $D_0 : C^0 \times C^0 \to [0, \infty)$ por

$$D_0(f, g) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{\sup_{K_i} |f(z) - g(z)|}{1 + \sup_{K_i} |f(z) - g(z)|}.$$

   Demuestra que D_0 es una métrica.

4. Demuestra que una sucesión $f_n \in \mathcal{F}$ converge uniformemente en compactos de Ω a una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ si y sólo si $D_0(f_n, f) \to 0$ cuando $n \to \infty$.

5. Demuestra que una familia $\mathcal{F}$ es compacta con respecto a D_0 si y sólo si $\mathcal{F}$ es normal y contiene todos sus funciones límite.

6. Sea $f_n \in \mathcal{H}$, $n \geq 1$, una sucesión de funciones que son uniformemente acotadas en compactos. Si para cada $z \in \Omega$, la sucesión $f_n(z)$ converge en $\mathbb{C}$, demuestra que f_n es una sucesión que converge uniformemente en compactos.

Extensiones Analíticas A Través De Curvas

7. Sea Ω un dominio y $\gamma \subset \partial\Omega$ un arco frontera de un solo lado y libre. Si $f : \Omega \to \mathbb{D}$ es una aplicación conforme con extensión analítica a $\Omega \cup \gamma$, demuestra que $f|_\gamma$ es inyectiva.

8. Dados $0 < a < b$, denota por R el interior del rectángulo con vértices en $\{(0,0),(a,0),(0,b),(a,b)\}$. Sea $f : R \to \mathbb{D}$ un biholomorfismo. Usando el Principio de Reflexión de Schwarz para arcos analíticos, calcula de forma explícita la extensión conforme de f a través de cada arco de ∂R.

Fórmula de Schwarz-Christoffel

9. ¿Cuál es la Fórmula de Schwarz-Christoffel que debe satisfacer g' para la aplicación conforme $w = g(z)$ que envía $\mathbb{H}$ a la banda horizontal $0 < \mathrm{Im}(w) < a$ y satisface $g(0) = -\infty$ y $g(\infty) = +\infty$? Integrando, muestra que $g(z) = g(1) + (a\mathrm{Log}(z))/\pi$.

10. Usa la Fórmula de Schwarz-Christoffel para calcular la aplicación conforme $w = g(z)$ que envía $\mathbb{H}$ sobre la banda $B = \{w \mid \mathrm{Im}(w) > 0, -a < \mathrm{Re}(w) < a\}$ y tal que $g(1) = a$, $g(-1) = -a$ y $g(0) = 0$.

11. Para un valor $k \in (0,1)$ fijo, muestra que
$$w = g(z) = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}}$$
envía $\mathbb{H}$ conformemente a un rectángulo. Dibuja el rectángulo usando la notación
$$K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}}, \quad \text{y} \quad K' = \int_1^{1/k} \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}\sqrt{1-k^2t^2}}.$$

12. Denota por $z = h(w)$ la función inversa de $w = g(z)$ definida en el problema anterior. Demuestra lo siguiente.
    (a) h es una función impar y meromorfa del plano complejo.
    (b) h es doblemente periódica con períodos $4K$ y $2iK'$.

    Encuentra los ceros y polos de h e identifica su orden.[1]

[1] La función $h(w)$ es la función elíptica Jacobiana $w \mapsto sn(w)$