1 Fórmula de Schwarz-Christoffel

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio conformemente equivalente al disco unitario y cuya frontera, $\partial\Omega$, es una curva poligonal. Esto es, consiste de un número finito de segmentos de recta y $m \geq 3$ vértices, denotados por $w_1, \ldots, w_m$ e indexados siguiendo la orientación positiva de $\partial\Omega$. Para cada $j = 1, \ldots, m$, denotamos el ángulo interno en w_j por

$$\pi\alpha_j = \arg\left(\frac{w_{j-1} - w_j}{w_{j+1} - w_j}\right), \quad \text{con } 0 < \alpha_j < 2.$$

Sea $g : \mathbb{H} \to \Omega$ un biholomorfismo entre estos dominios. La fórmula de Schwarz-Christoffel se obtendrá como una ecuación diferencial que debe satisfacer g.
Como cada segmento $[w_i, w_{i+1}] \subset \partial\Omega$ es un arco analítico, g admite una extensión conforme sobre (w_i, w_{i+1}). El siguiente teorema (demostrado en clase) nos dice cómo se comporta g en cada vértice.

Theorem 1.1 (Teorema de Vértices)**.** *Bajo las condiciones anteriores y el vértice $w \in \partial\Omega$ con ángulo interno α, entonces*

1. *existen intervalos contiguous con punto común $a \in \mathbb{R}_\infty$ que son enviados bajo g a los lados contiguos del vértice w.*
2. *La función g se extiende de forma continua sobre los vértices, de tal forma que $g(a) = w$.*
3. *Si $a \in \mathbb{R}$, entonces g''/g' se extiende meromorfamente a a con un polo simple y residuo $\alpha - 1$. Si $a = \infty$, entonces g''/g' se extiende de forma analítica a ∞ y se anula ahí.*

En la demostración del Teorema de Vértices se obtiene que en una vecindad en $\mathbb{H}$ de $w \in \partial\Omega$,

$$g(z) = w + (z - a)^\alpha h(z),$$

donde h es una función analítica con $h(a) \neq 0$. Diferenciado dos veces, se obtiene

$$\begin{aligned} g'(z) &= (z-a)^{\alpha-1}\left(\alpha h(z) + \mathcal{O}(z-a)\right), \\ g''(z) &= (z-a)^{\alpha-2}\left(\alpha(\alpha-1)h(z) + \mathcal{O}(z-a)\right), \end{aligned}$$

con lo cual se obtiene

$$\frac{g''(z)}{g'(z)} = \frac{\alpha - 1}{z - a} + \text{términos analíticos en}(z - a),$$

para $|z - a| < \varepsilon$, $\mathrm{Im}(z) > 0$.

Theorem 1.2 (Fórmula de Schwarz-Christoffel)**.** *Sea $g : \mathbb{H} \to \Omega$ biholomorfismo con $\partial\Omega$ una curva poligonal. Sean $a_1 < a_2 < \ldots < a_m$ puntos en $\mathbb{R}_\infty$ que son enviados bajo g a los vértices $w_1, \ldots, w_m \subset \partial\Omega$, ordenados de forma positiva.*
Si $\pi\alpha_j$ con $0 < \alpha_j < 2$, es el ángulo interno de $w_j = g(a_j)$ para $1 \leq j \leq m$, entonces

$$\frac{g''(z)}{g'(z)} = \frac{\alpha_1 - 1}{z - a_1} + \ldots + \frac{\alpha_m - 1}{z - a_m}, \tag{1.1}$$

y existen constantes A, B tales que

$$g'(z) = A(z - a_1)^{\alpha_1 - 1} \cdots (z - a_m)^{\alpha_m - 1}, \tag{1.2}$$

$$g(z) = A \int_{z_0}^{z} (t - a_1)^{\alpha_1 - 1} \cdots (t - a_m)^{\alpha_m - 1} dt + B. \tag{1.3}$$

La ecuación en (1.2) (también la (1.3)) es conocida como la Fórmula de Schwarz-Christoffel.

Demostración. Sea $I_j = (a_j, a_{j+1})$ arcos sobre $\mathbb{R}_\infty$. Si todo $a_j \in \mathbb{R}$, añadimos los arcos $I_0 = (-\infty, a_1)$, $I_{m+1} = (a_m, \infty)$. Por ser cada I_j un arco analítico libre y por un lado de $\mathbb{H}$, g admite una extensión analítica a través de I_j sobre $\mathbb{H}^-$ y dicha extensión toma valores en los dominios correspondientes al reflejar Ω a través del arco $(w_j, w_{j+1}) \subset \partial\Omega$.
Más aún, $g|_{\Omega \cup I_j}$ es conforme, por lo tanto g no tiene puntos críticos en cada I_j, esto es, g' no se anula en cada I_j. Luego g''/g' también se extiende analíticamente a través de los I_j a $\mathbb{H}^-$.
Por el Teorema de Vértices, sabemos que para cada a_j se tiene en $|z - a_j| < \varepsilon$,

$$\frac{g''(z)}{g'(z)} = \frac{\alpha - 1}{z - a} + \text{términos analíticos en}(z - a),$$

con lo cual, g''/g' tiene una extensión meromorfa en $\mathbb{C}$, con polos simples en $a_j \in \mathbb{R}$. Si $a_j = \infty$, entonces g''/g' es analítica en ese punto. Por lo tanto, g''/g' es una función meromorfa de la esfera de Riemann, esto es, g''/g' es una función racional, y la ecuación (1.1) es su expresión en fraciones parciales.
Integrando (1.1), se obtiene

$$\log g'(z) = \sum_{j=1}^{m} (\alpha_j - 1) \log(z - a_j) + c,$$

con $c \in \mathbb{C}$ constante. De esta expresión se sigue (1.2) con $A = e^c$. Una segunda integración da lugar a (1.3). $\square$

Un par de observaciones:

- cada singularidad de g en a_j es integrable, pues $\alpha_j > 0$,
- si w_j tiene ángulo interno π, entonces $a_j - 1 = 0$ y por lo tanto, el término $(z - a_j)$ no aparece en la Fórmula de Schwarz-Christoffel.

1.1 Ejemplo

Para un $a > 0$ fijo, definamos $\Omega = \mathbb{H} - \{iy \mid y \in [0, a]\}$. Identificamos tres vértices de la frontera de Ω: $w_1 = 0, w_2 = ai, w_3 = 0$, con ángulos internos $\alpha_1 = 1/2, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = 1/2$. Sea $g : \mathbb{H} \to \Omega$ solución a la Fórmula de Schwarz-Christoffel tal que $a_1 = -1, a_2 = 0, a_3 = 1$. Por la ecuación (1.2),

$$\begin{aligned} g'(z) &= A(z+1)^{-1/2} z (z-1)^{-1/2}, \\ &= \frac{Az}{\sqrt{z^2 - 1}}. \end{aligned}$$

Integrando se obtiene

$$\begin{aligned} g(z) &= A \int_{z_0}^{z} \frac{t}{\sqrt{t^2 - 1}} dt + B, \\ &= A\sqrt{z^2 - 1}, \end{aligned}$$

al elegir $z_0 = 1$ para que $B = 0$. Como $g(-1) = g(1) = 0$ y $g(0) = A\sqrt{-1} = Ai$, por lo que $A = a$. Se concluye $g(z) = a\sqrt{z^2 - 1}$, usando la rama de la raíz cuadrada que envía $(1, \infty)$ al intervalo $(0, \infty)$. ¿Qué se puede concluir sobre la extensión de g a través de los intervalos $I_j \subset \mathbb{R}_\infty$ y las ramas de la raíz cuadrada que definen dichas extensiones?