FAMAT

MAT101 — Matemáticas Elementales y Elementos de Geometría — Abril 28, 2008

Tarea 11

Cada problema tiene un valor de 1 punto y se califica sobre 10 puntos.

1. Completa cada una de las afirmaciones (de forma que obtengas una proposición verdadera) y da su demostración.
   (a) El producto de dos números pares es ... y de dos impares es .... El producto de un número par por un impar es ....
   (b) La suma de dos números pares es ... y de dos números impares es .... La suma de un número par y un impar es ....
2. Sea R el anillo de las matrices 2×2 con entradas sobre el campo $\mathbb{R}$. Demostrar que R no es un anillo de división comprobando *directamente* que la matriz
   $$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
   con $ad - bc = 0$ no tiene inverso multiplicativo.
3. Demuestra que un anillo de división es un dominio entero.
4. Sea R el conjunto de todos los racionales con denominador impar en su forma reducida. Demuestra que R, con las operaciones de suma y producto en $\mathbb{Q}$, es un dominio entero con unidad, pero no es un campo.
5. Demuestra que si R es un dominio entero finito, entonces es un campo.
6. Demuestra que si $\psi : R \to R/K$ está dada por $\psi(a) = a + K$ para $a \in R$, entonces ψ es un endomorfismo (de anillos) con kernel $K(\psi) = K$.
7. En el ejemplo dado en clase, da explícitamente la forma del isomorfismo entre R/I y $\mathbb{Z}_2$ y demuestra que es efectivamente un isomorfismo.
8. Sea R el conjunto de todas las matrices sobre el campo $\mathbb{R}$ de la forma
   $$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

y considera $\mathbb{C}$, el campo de los número complejos. Define $\psi : R \to \mathbb{C}$ por $\psi(A) = a + bi$. Demuestra que ψ es un isomorfismo y por lo tanto $R \simeq \mathbb{C}$.

9. Sean R, S anillos y considera el anillo $R \oplus S$. Demuestra que los subanillos $R_0 = \{(r, 0_s) \mid r \in R\}$ y $S_0 = \{(0_r, s) \mid s \in S\}$ son ideales de $R \oplus S$ e isomorfos a R y S respectivamente.

10. Sean I, J ideales de R. Sea $R_1 = R/I$ y $R_2 = R/J$. Demuestra que $\varphi : R \to R_1 \oplus R_2$ definido como

$$\varphi(r) = (r + I, r + J)$$

es un endomorfismo con kernel $K(\varphi) = I \cap J$.

Fecha de entrega: Mayo 6, 2008 en clase.