FAMAT

MAT101 — Matemáticas Elementales y Elementos de Geometría — Mayo 12, 2008

Tarea 13

Cada problema tiene un valor de 1 punto y se califica sobre 10 puntos.

1. Demuestra que si $p(x), q(x) \in F[x]$ tienen grado definido y $p(x) + q(x) \neq 0$, entonces $deg(p(x) + q(x)) \leq \max\{deg(p(x)), deg(q(x))\}$.

2. Demuestra el lema de representación única: si $I \subset F[x]$ es un ideal, entonces existe un único polinomio mónico $p(x) \in I$ tal que $I = (p(x))$.

3. Demostra que si $p(x), q(x) \in F[x]$ con grado definido y si existen $a(x), b(x) \in F[x]$ tales que $a(x)p(x) + b(x)q(x) = 1$, entonces $p(x)$ y $q(x)$ son primos relativos.

4. Encuentra el máximo común divisor de los siguientes polinomios sobre $\mathbb{Q}$:

   (a) $3x^2 + 1$ y $x^6 + x^4 + x + 1$.

   (b) $x^3 - 1$ y $x^7 - x^4 + x^3 - 1$.

5. Demuestra que los siguientes polinomios son irreducibles sobre el campo indicado:

   (a) $x^3 - 3x + 3$ sobre $F = \mathbb{Q}$.

   (b) $x^2 + x + 1$ sobre $F = \mathbb{Z}_2$.

   (c) $x^3 - 9$ sobre $F = \mathbb{Z}_{13}$.

6. Demuestra que $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1) \simeq \mathbb{C}$.

7. Demuestra que todo anillo Euclideano tiene elemento unidad.

8. Sea $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ y $g(x) = f(x + 1)$. Demuestra que si g es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$ entonces f también es irreducible.

9. Sea $p(x) \in F[x]$ de grado $n > 0$ con al menos una raíz en F, esto es $x_0 \in F$ y $p(x_0) = 0$. Demuestra por inducción que $p(x)$ tiene a lo más n raíces.

10. Demuestra que $\Phi : R[x] \to (R/I)[x]$ definido en clase, es un endomorfismo de anillos.

Fecha de entrega: Mayo 19, 2008 en clase.