FAMAT

MAT101	Matemáticas Elementales y Elementos de Geometría	Mayo 19, 2008

Tarea 14

Cada problema tiene un valor de 1.25 punto y se califica sobre 10 puntos.

1. Demuestra que los siguientes polinomios son irreducibles sobre el campo indicado:
   (a) $x^3 - 3x + 3$ sobre $F = \mathbb{Q}$.
   (b) $2x^3 - 4x^2 + 4x - 7$ sobre $F = \mathbb{Q}$.
   (c) $x^2 + x + 1$ sobre $F = \mathbb{Z}$.
   (d) $x^2 + x + 1$ sobre $F = \mathbb{Z}_2$ (asume que existe una factorización no trivial y trata de llegar a una contradicción).
2. Considera $\mathbb{C} = \{a+bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ y define $\varphi : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{C}$ tal que $\varphi(x) = i$ y $\varphi(tx) = t\varphi(x)$ para cualquier $t \in \mathbb{R}$. Demuestra lo siguiente:
   (a) $\varphi(a_k x^k) = a_k i^k$ para todo entero $k \geq 0$.
   (b) φ es un endomorfismo de anillos.
3. Con las mismas hipótesis del problema anterior, demuestra que
   (a) $K(\varphi) = (x^2 + 1)$, esto es, el kernel coincide con el ideal principal
   $$(x^2 + 1) = \{p(x)(x^2 + 1) \mid p(x) \in \mathbb{R}[x]\}$$
   (b) $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1) \simeq \mathbb{C}$.
4. Sea F un campo de característica $0 \neq p < \infty$. Usando el teorema del binomio y que p es un número primo, demuestra que para toda $a, b \in F$, $(a + b)^p = a^p + b^p$.
5. Sea V un espacio vectorial sobre F y $v_1, \ldots, v_k \in V$. Demuestra directamente que $< v_1, \ldots, v_k >$ es un espacio vectorial sobre F.
6. Demuestra el lema de las propiedades de espacios vectoriales visto en clase.

7. Sea $M_2(\mathbb{R})$ el conjunto de todas las matrices de tamaño 2×2 con entradas en $\mathbb{R}$. Demuestra que $M_2(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$ y encuentra una base.

8. Si V es un espacio de dimensión finita sobre F y si W es un subespacio de V demuestra lo siguiente:

   (a) W tiene dimensión finita sobre F y $dim_F(W) \leq dim_F(V)$.

   (b) Si $dim_F(W) = dim_F(V)$ entonces $W = V$.

Fecha de entrega: Mayo 26, 2008 en clase.