FAMAT

MAT101 | Matemáticas Elementales y Elementos de Geometría | Marzo 12, 2008

Tarea 7

Cada problema tiene un valor de 1.0 puntos y se califica sobre 10 puntos.

1. Sea $S$ un conjunto no vacío. Para cualesquier dos subconjuntos $A, B \subset S$ definamos,
$$A + B = (A - B) \cup (B - A).$$
Demuestra lo siguiente:
   (a) $A + \emptyset = A$.
   (b) $A + A = \emptyset$.
   (c) $A + (B + C) = (A + B) + C$.

2. Sea $f : S \to T$ una biyección. Demuestra que $f^{-1} : T \to S$ es también una biyección.

3. Sea $S = \mathbb{Z}$ y sea $f : S \to S$ definida por $f(s) = as + b$, donde $a$ y $b$ son enteros fijos. Encuentra las condiciones necesarias y suficientes sobre $a$ y $b$ para que se cumpla $f \circ f = i_S$. ¿Puedes asegurar que $f$ es una biyección?

4. Sea $S_3$ el grupo de simetrías de orden 3. Utilizando las simetrías del triángulo equilatero (ver figura) calcula las seis funciones que pertenecen a $S_3$. (Por ejemplo, el primer triángulo representa la función
$$i : A \mapsto A;\ B \mapsto B;\ C \mapsto C,$$
mientras que el segundo triángulo genera la función
$$f : A \mapsto C;\ B \mapsto A;\ C \mapsto B.$$
Representar el resto de las figuras como *nuevas* funciones o *composiciones* de funciones ya calculadas.)

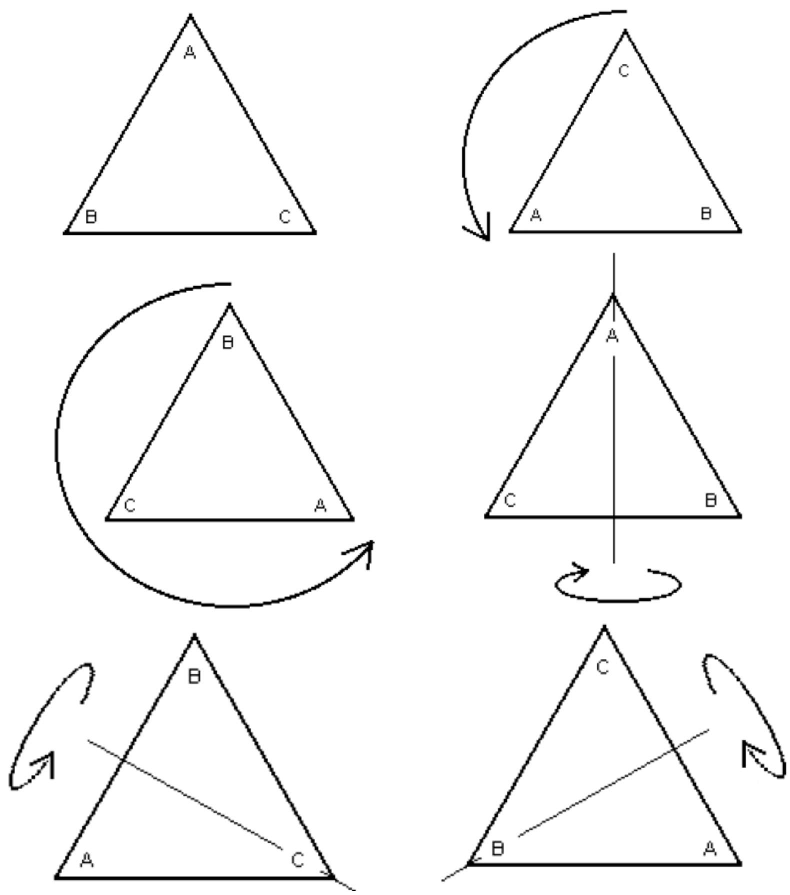


**Figura:** Simetrías del triángulo equilátero (por Dr. A. Sánchez).

5. Sea $h$ cualquier elemento de $S_3$. Demuestra que $h^6 = i$.

6. Definamos el *mínimo común múltiplo* de $m$ y $n$ como el entero positivo más pequeño $k$ tal que $m|k$ y $n|k$. Demuestra que $k = mn/(m, n)$.

7. Encuentra el máximo común múltiplo y el mínimo común múltipo de los siguientes pares de números: $\{72, 25\}$ y $\{72, 26\}$

8. Encuentra las factorizaciones en términos de números primos de los siguientes números: $120, 720$ y $5040$.

9. Demuestra que para todo entero $n > 0$ se cumple

$$(\cos\theta + i \text{ sen } \theta)^{-n} = \cos(-n\theta) + i \text{ sen } (-n\theta).$$

10. Sea $S$ un conjunto no vacío y denota por $S^S$ la colección de todos los subconjuntos de $S$. Definamos una operación binaria $*$ en $S^S$ por

$$A, B \in S^S, \text{ entonces } A * B = A + B,$$

con $A + B$ como fué definido en el problema 1. Demuestra que $(S^S, *)$ es un grupo.

Fecha de entrega: Marzo 31, 2008 en clase.