FAMAT

MAT101 Matemáticas Elementales y Elementos de Geometría Marzo 31, 2008

Tarea 8

Cada problema tiene un valor de 1.0 punto y se califica sobre 10 puntos.

1. Sea $\mathcal{O}_n$ el conjunto de las raíces n-ésimas primitivas de la unidad y $*$ el producto de números complejos. Demuestra que $(\mathcal{O}_n, *)$ es un grupo.
2. Sea $f(x, y) = (-x, y)$ y $g(x, y) = (-y, x)$ dos biyecciones del cuadrado con vértices A, B, C y D y centro en el origen. Demuestra que $G = \{f^i \circ g^j \mid i = 0, 1;\ j = 0, 1, 2, 3\}$ es un grupo de orden 8 con la operación de composición utilizando la tabla de grupo vista en clase.
3. Demuestra que un grupo G de orden $|G| \leq 4$ tiene que ser abeliano.
4. Demuestra que un grupo G donde para todo $a \in G$, $a = a^{-1}$, tiene que ser abeliano.
5. Demuestra que si G es cíclico, entonces es abeliano.
6. Sea S un conjunto no vacío y $\mathcal{A}(S)$ el conjunto de automorfismos bajo la operación de composición. Sea $a \in S$ y definamos
$$H_a = \{f \in \mathcal{A}(S) \mid f(a) = a\}.$$
Demuestra que H_a es un subgrupo de $\mathcal{A}(S)$.
7. Sea S_3 el grupo simétrico de grado 3. Encuentra todos los subgrupos de S_3.
8. Sea G cualquier grupo y define el *centro* de G por
$$Z(G) = \{z \in G \mid za = az, \text{ para toda } a \in G\}.$$
Demuestra que $Z(G)$ es un subgrupo de G.
9. Para cada $a \in S_3$, encuentra su centralizador, esto es $C(a)$.
10. Demuestra que si G no tiene subgrupos propios, entonces G es cíclico.

Fecha de entrega: Abril 7, 2008 en clase.