

FAMAT

MAT101

Matemáticas Elementales y  
Elementos de Geometría

Abril 7, 2008

Tarea 9

Cada problema tiene un valor de 1.0 punto y se califica sobre 10 puntos.

1. Sea  $S$  un conjunto no vacío y considera el grupo  $(\mathcal{A}(S), \circ)$ . Sea  $a \in S$  y define

$$H_a = \{f \in \mathcal{A}(S) \mid f(a) = a\}.$$

Demuestra que  $(H_a, \circ)$  es un subgrupo de  $\mathcal{A}(S)$ .

2. Sea  $(G, *)$  un grupo arbitrario y  $\mathcal{Z}(G)$  el centro de  $G$ . Demuestra que  $\mathcal{Z}(G)$  es un subgrupo de  $G$ .
3. Si  $G$  no tiene subgrupos propios, demuestra que  $G$  es cíclico y de orden primo.
4. Sea  $G$  un grupo,  $a, x \in G$ , y  $\mathcal{C}(a)$  el centralizador del elemento  $a$ . Demuestra que

$$\mathcal{C}(x^{-1}ax) = x^{-1}\mathcal{C}(a)x.$$

5. Sea  $G$  un grupo arbitrario. Para  $a, b \in G$  declaramos  $a \sim b$  si existe  $x \in G$  tal que  $b = x^{-1}ax$ . Demuestra que  $\sim$  es una relación de equivalencia en  $G$ . (Nota: Esta relación se le llama *conjugación* y si  $a \sim b$ , decimos “ $a$  y  $b$  son conjugados en  $G$ ”.)
6. Sea  $G$  un grupo y  $H$  un subgrupo de  $G$ . Define, para  $a, b \in G$  la relación  $a \sim b$  si  $a^{-1}b \in H$ . Demuestra que
  - (a)  $\sim$  es una relación de equivalencia en  $G$ ;
  - (b)  $aH = \{ah \mid h \in H\}$  son las clases de equivalencia de  $\sim$  (llamadas *clases laterales derechas de  $H$  en  $G$* ).
7. Sea  $S = \{x_1, x_2, x_3\}$ ,  $G = S_3$  y  $H = \{id, f\}$  donde  $f : S \rightarrow S$  si  $f(x_1) = x_2, f(x_2) = x_1$  y  $f(x_3) = x_3$ . Encuentra todas las clases laterales derechas e izquierdas de  $H$  en  $G$ .
8. Si para un grupo  $G$  dado,  $a^5 = e$  y  $aba^{-1} = b^2$  encuentra  $\circ(b)$  si  $b \neq e$ .

9. Sea  $\varphi : (G, *) \rightarrow (G', *')$  un homomorfismo. Demuestra que  $\varphi(G)$  es un subgrupo de  $G'$  con respecto a  $*'$ .
10. Sea  $\varphi$  un homomorfismo de  $G$  en  $G'$ . Demuestra que  $\varphi$  es un monomorfismo si y sólo si  $K(\varphi) = \{e\}$ .

Fecha de entrega: Abril 14, 2008 en clase.