Repaso de Trigonometría

Mat101

Enero - Mayo, 2008

Instructora: Mónica Moreno Rocha

CIMAT

1 Funciones Trigonométricas

Las funciones trigonométricas básicas que estudiaremos son: seno, coseno y tangente, así como sus *recíprocas*, cotangente, secante y cosecante. Las denotaremos por $\operatorname{sen}, \cos, \operatorname{tg}$ y $\operatorname{ctg}, \sec$ y $\csc$ respectivamente. Basándonos en el triángulo de la figura 1, podemos definir cada función trigonométrica del ángulo θ por

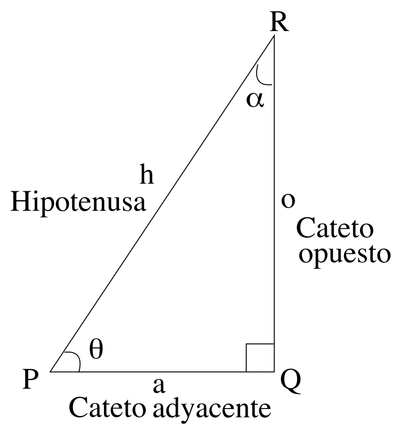

Figura 1 El triángulo trigonométrico.

$$\operatorname{sen}\,\theta = \frac{\textit{cateto opuesto}}{\textit{hipotenusa}} = \frac{o}{h} \qquad \cos\theta = \frac{\textit{cateto adyacente}}{\textit{hipotenusa}} = \frac{a}{h} \qquad \operatorname{tg}\,\theta = \frac{\textit{cateto opuesto}}{\textit{cateto adyacente}} = \frac{o}{a}$$

$$\operatorname{ctg}\,\theta = \frac{\textit{cateto adyacente}}{\textit{cateto opuesto}} = \frac{a}{o} \qquad \sec\theta = \frac{\textit{hipotenusa}}{\textit{cateto adyacente}} = \frac{h}{a} \qquad \csc\theta = \frac{\textit{hipotenusa}}{\textit{cateto opuesto}} = \frac{h}{o}$$

Usando estas relaciones podemos obtener

$$\operatorname{tg}\,\theta = \frac{\operatorname{sen}\,\theta}{\cos\theta},$$

y de aquí tenemos que las funciones recíprocas son dadas por

$$\operatorname{ctg}\,\theta = \frac{1}{\operatorname{tg}\,\theta} = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\,\theta} \qquad \sec\,\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \csc\,\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\,\theta}.$$

2 Identidades

2.1 Ángulos complementarios

Dos ángulos θ y α son complementarios si $\theta+\alpha=90^\circ$ (o $\pi/2$ en radianes). Como la suma de todos los ángulos de un triángulo es 180° (o π), vemos de la figura 1 que θ y α son complementarios.

Si queremos usar el ángulo α para definir las funciones trigonométricas, sólo necesitamos escribir $\alpha=90^\circ-\theta=\pi/2-\theta$ y renombrar los catetos adyacente y opuesto por o y a respectivamente. De aquí obtenemos las identidades de ángulos complementarios.

$$\text{sen }(\pi/2-\theta)=\cos\theta \qquad \cos\ (\pi/2-\theta)=\text{sen }\theta \qquad \text{tg }(\pi/2-\theta)=\text{ctg }\theta.$$

$$\text{ctg }(\pi/2-\theta)=\text{tg }\theta \qquad \sec\ (\pi/2-\theta)=\csc\ \theta \qquad \csc\ (\pi/2-\theta)=\sec\ \theta.$$

2.2 Identidades de Pitágoras

$$\boxed{\cos^2\theta+\text{sen}^2\ \theta=1}$$

Deducción: Usando el teorema de Pitágoras y las definiciones de seno y coseno tenemos

$$\cos^2\theta+\text{sen}^2\ \theta=\frac{o^2}{h^2}+\frac{a^2}{h^2}=\frac{o^2+a^2}{h^2}=\frac{h^2}{h^2}=1.$$

De forma similar se pueden obtener

$$\boxed{\text{tg}^2\theta+1=\sec^2\ \theta} \qquad \boxed{\text{ctg}^2\theta+1=\csc^2\ \theta}$$

2.3 Suma de ángulos

Dados dos ángulos α y β, se tiene

$$\boxed{\text{sen }(\alpha\pm\beta)=\text{sen }\alpha\cos\beta\pm\text{sen }\beta\cos\alpha} \qquad \boxed{\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\text{sen }\alpha\text{sen }\beta}$$

Hay varias formas de deducir estas identidades. Una de ellas es por medio de la figura 2. Por ejemplo, se puede verificar que

$$\text{sen }(\alpha+\beta)=\overline{PB}=\overline{RB}+\overline{PR}=\overline{AQ}+\overline{PR}=\text{sen }\alpha\cos\beta+\text{sen }\beta\cos\alpha.$$

También tenemos $\cos(\alpha+\beta)=\text{sen }(\pi/2-(\alpha+\beta))=\text{sen}((\pi/2-\alpha)-\beta)$, y sólo basta aplicar la fórmula del seno para la diferencia de ángulos.

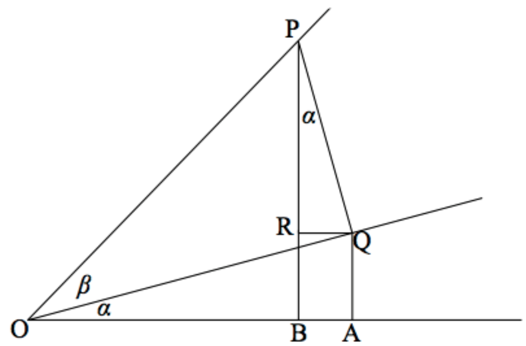

Figura 2 La suma de los ángulos α y β.
Fuente: www.wikipedia.com.

Es un buen ejercicio deducir las siguientes identidades

$$\text{tg }(\alpha+\beta) = \frac{\text{tg }\alpha + \text{tg }\beta}{1 - \text{tg }\alpha \text{ tg }\beta} \qquad \text{ctg }(\alpha+\beta) = \frac{\text{ctg }\alpha \text{ ctg }\beta - 1}{\text{ctg }\alpha + \text{ctg }\beta}$$

2.4 Ángulos dobles

Tomando $\beta = \alpha$ en las identidades de suma de ángulos, podemos deducir

$$\boxed{\text{sen }(2\alpha) = 2\text{sen }\alpha\cos\alpha} \qquad \boxed{\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\ \alpha}$$

3 Ejercicios

A partir de las identidades estudiadas, calcular

1. $\text{sen}(-\theta), \cos(-\theta), \text{tg}(-\theta), \csc(-\theta), \sec(-\theta)$ y $\text{ctg}(-\theta)$.
2. $\text{sen}(\pi/2-\theta), \cos(\pi/2-\theta), \text{tg}(\pi/2-\theta), \csc(\pi/2-\theta), \sec\pi/2-\theta)$ y $\text{ctg}(\pi/2-\theta)$
3. $\text{sen}(\pi-\theta), \cos(\pi-\theta), \text{tg}(\pi-\theta), \csc(\pi-\theta), \sec(\pi-\theta)$ y $\text{ctg}(\pi-\theta)$.
4. $\text{sen}(\theta+\pi/2), \cos(\theta+\pi/2), \text{tg}(\theta+\pi/2), \csc(\theta+\pi/2), \sec(\theta+\pi/2)$ y $\text{ctg}(\theta+\pi/2)$.
5. $\text{sen}(\theta+\pi), \cos(\theta+\pi), \text{tg}(\theta+\pi), \csc(\theta+\pi), \sec(\theta+\pi)$ y $\text{ctg}(\theta+\pi)$.
6. $\text{sen}(\theta+2\pi), \cos(\theta+2\pi), \text{tg}(\theta+2\pi), \csc(\theta+2\pi), \sec(\theta+2\pi)$ y $\text{ctg}(\theta+2\pi)$.

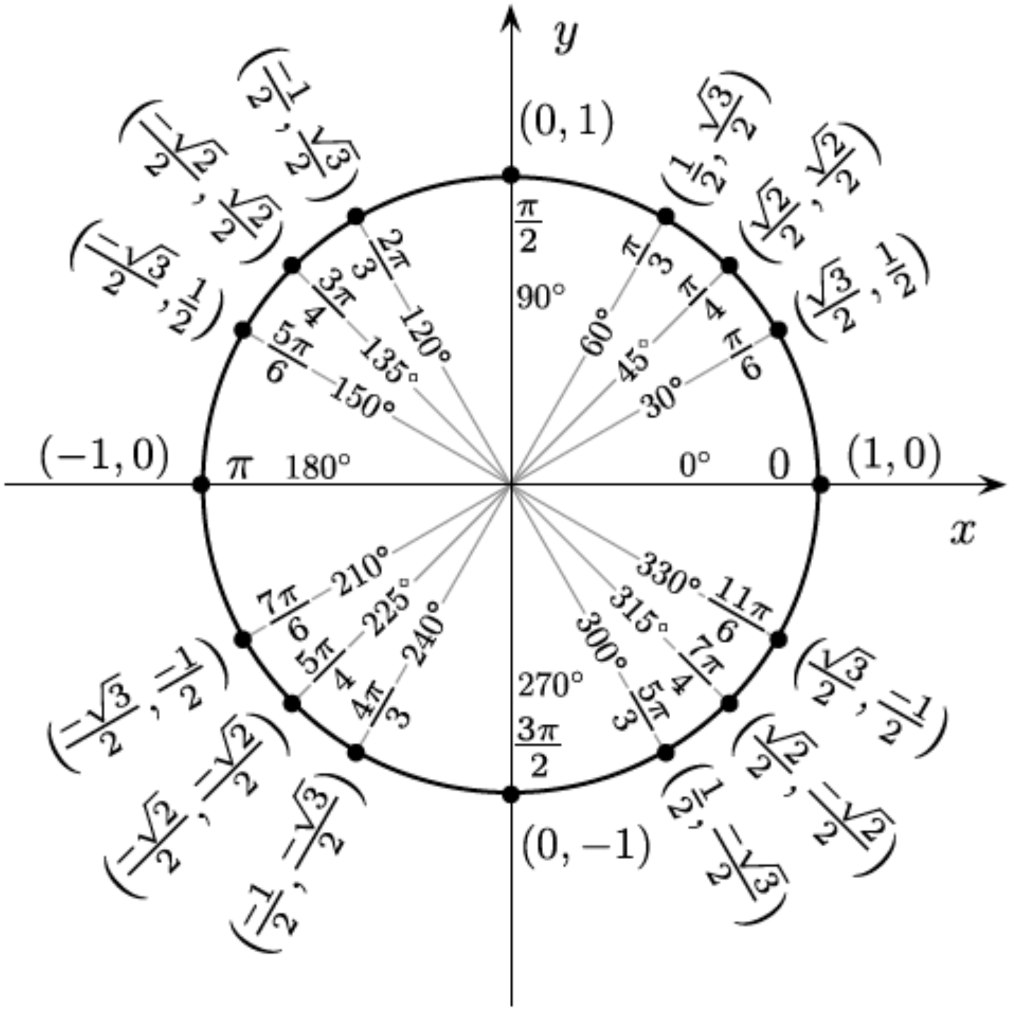

Figura 3 Círculo unitario y valores de $(x, y) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ para ciertos ángulos.
Fuente: www.wikipedia.com