CIMAT

90DSI02 Dinámica Holomorfa Abril 21, 2009

Lista de problemas

1. Clasifique las transformaciones de Möbius $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ salvo por conjugación topológica. Determine cuáles son estructuralmente estables.
2. Sea f meromorfa en $\mathbb{C}$ y suponga que existe un entero $m > 0$ tal que $\# f^{-1}(w) \leq m$ para todo $w \in \mathbb{C}$. Demuestre que f es racional.
3. Si Q es un polinomio de grado $d \geq 2$, demuestre que siempre tiene un punto fijo repulsor ó parabólico (y por lo tanto, $J(Q) \neq \emptyset$).
4. Si Q es un polinomio de grado $d \geq 2$ si y sólo si $Q^{-1}(\infty) = \{\infty\}$ (y por lo tanto $F(Q) \neq \emptyset$).
5. Sea $\mathcal{G} = \{g_n\}$ una familia de funciones racionales del mismo grado $d \geq 2$. Suponga que para cada triada de puntos $\{a, b, c\} \subset \overline{\mathbb{C}}$, existe una subsucesión g_{n_k} que los omite. ¿Es $\mathcal{G}$ una familia normal?
6. Demuestre que el conjunto de Julia de una función racional sobre $\overline{\mathbb{C}}$ contiene todos sus puntos fijos repulsores.
7. Para las siguientes funciones racionales, demuestre la existencia de uno o varios dominios de Fatou completamente invariantes, indique su clase (dominio Böttcher, Schröder, Leau etc.) y si es simplemente conexo ó infinitamente conexo. Si es posible, obtenga imágenes de los conjuntos de Julia.
   (a) $A(z) = \lambda z + z^2$, con $\lambda = \exp(\pi i(\sqrt{5} - 1))$.
   (b) $B(z) = 6z(1 - z)$.
   (c) $C(z) = z - z^2 + z^3/z_0$, con $z_0 = -0.41 + 0.54i$.
8. Suponga que $\mathcal{A}$ tiene un número finito de componentes simplemente conexas que constituyen un ciclo atractor para una racional f de grado $d \geq 2$. Usando la fórmula de Riemann–Hurwitz, demuestre que el periodo del ciclo es a lo más dos.

9. Muestre que para el polinomio $p(z) = z^2 - z^3$, la uniformización de Böttcher φ sobre $\mathcal{A}(0)$ no admite una continuación analítica a todo $\mathcal{A}(0)$. Determine la localización y tipo de singularidades que evitan dicha continuación.

10. Sea D un dominio simplemente conexo y conformamente isomorfo al disco unitario $\mathbb{D}$. Sea $\zeta \in D$ arbitrario y $\varphi : D \to \mathbb{D}$ su uniformización de Riemann, tal que $\varphi(\zeta) = 0$. Demuestre que $G(z) = -\log|\varphi(z)|$ es la función de Green para D con polo en ζ.

11. Demuestre el teorema de Kœnigs para una cuenca de atracción:

    > Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa con un punto fijo atractor $z_0 = f(z_0)$ de multiplicador $0 < |\lambda| < 1$. Sea $\mathcal{A}$ la cuenca de atracción de z_0. Entonces existe $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que $\varphi(z_0) = 0$,
    > $$\varphi \circ f = \lambda\varphi,$$
    > y φ manda una vecindad de z_0 biholomorfamente a una vecindad del origen. Además, φ es única salvo por una constante multiplicativa.

12. Determine todos los polinomios de grado 3 (salvo conjugaciones) que tiene exactamente un dominio de Leau (pétalo atractor) y exactamente un dominio de Schröder.

13. Dado $f(z) = z + 1/(1 + z^2)$ demuestre que existen tres direcciones atractoras al infinito. Además pruebe que una de las tres cuencas inmediatas parabólicas contienen a todo $\mathbb{R}$, y por lo tanto *casi* separa la esfera de Riemann.

14. Demuestre que para f racional, el número de ciclos atractores mas el número de ciclos parabólicos (contando multiplicidad) es a lo más $2d - 2$.

15. Denote por $\mathcal{C}_f$ el conjunto de puntos críticos de la función racional f de grado $d \geq 2$. Demuestre que todo ciclo neutro en $J(f)$ está contenido en el conjunto de acumulación de $\mathcal{C}_f$

16. Sea f una función racional postcríticamente finita. Demuestre que si f no tiene puntos periódicos superatractores, entonces $J(f) = \overline{\mathbb{C}}$.

17. Sea $f(z)$ una función racional postcríticamente finita. Demuestre que su conjunto de Julia es conexo.

18. Considere la familia de polinomios cuadráticos $P_c(z) = z^2 + c$ y defina el conjunto de Mandelbrot como

$$\mathcal{M} = \{c : |P_c^n(0)| \leq 2 \text{ para toda } n \geq 0\}.$$

Demuestre que el complemento $\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{M}$ es un dominio conexo. (Sug.: Principio del módulo máximo.)

19. Demuestre que un polinomio en $\overline{\mathbb{C}}$ no puede tener anillos de Herman.

20. Demuestre que para un parámetro genérico (en el sentido de categoría Baire) $c \in \partial\mathcal{M}$, el mapeo P_c no tiene ciclos neutros.

21. Sea $Q(z)$ un polinomio de grado $d \geq 2$ y defina $h : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ por

$$h(z) = \lim_{n\to\infty} |Q^n(z)|^{1/d^n}.$$

Demuestre que el límite existe, $h(Q(z)) = h(z)^d$, si $U = \{z \mid h(z) > 0\}$, entonces $U = \mathcal{B}(\infty)$ y $\partial U = J(f)$.

22. Demuestre que $S(z) = z + \sin(2\pi z)$ tiene una familia de dominios errantes $\{U_n\}$ con $S(U_n) = U_n + 1$ y una familia de dominios errantes $\{V_n\}$ con $S(V_n) = V_n - 1$.

23. Sea $E(z) = z + e^z - 1$. Demuestre que E tienen un dominio de Baker totalmente invariante y todos los valores críticos de E pertenecen al semiplano $H_- = \{z \mid \text{Re}z < 0\}$ y para todo $z \in H_-$, $\text{Re}E^n(z) \to -\infty$.

24. Sea $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ un mapeo $K-$casiconforme. Demuestre que para cualesquier cuádruple de puntos distintos en $\overline{\mathbb{C}}$, su razón cruzada satisface

$$\rho([a,b,c,d],[f(a),f(b),f(c),f(d)]) \leq \log K,$$

donde $\rho(\cdot)$ denota la métrica hiperbólica en $\overline{\mathbb{C}} - \{0,1,\infty\}$.

25. Sea μ una diferencial de Beltrami L^∞ sobre $\overline{\mathbb{C}}$. Calcule una fórmula para $df_t(z)/dt$ donde $f_t : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ es el único mapeo casiconforme que fija $0, 1, \infty$ y satisface $\mu(f_t) = t\mu$.

26. Demuestre que $J(f) = \{z \mid \forall\ U = U(z) : f|_U \text{ es caótica}\}$.

27. Sea f racional. Demuestre que el conjunto no errante, $\Omega = \Omega(f)$, coincide con la unión disjunta de $J(f)$, sus dominios de rotación (si estos existen) y $\text{Per}(f)$.

28. Sea f racional. Demuestre que f satisface el Axioma A si y sólo si f es hiperbólica.

29. Sea f racional. Demuestre que f es *expansiva* en una vecindad de $J(f)$ si y sólo si f es hiperbólica.

30. Considere la familia de polinomios cúbicos $f_t(z) = -z^3 + 12z + t$, sobre $\mathbb{D} = \{t \mid |t| < 1\}$. Demuestre que f_t no es topológicamente estable. Bosqueje una imagen del régimen estable. ¿Qué ocurre dinámicamente en los puntos topológicamente no estables?

Fecha de entrega: Mayo 21, 2009, en clase.