CIMAT

90EDO01 | Ecuaciones Diferenciales Ordinarias | Febrero 26, 2009

Examen Parcial 1

Cada problema tiene un valor de 2.5 puntos. Puede utilizar los resultados vistos en clase y en las tareas salvo si se pide explícitamente demostrarlos.

1. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales.
$$\begin{aligned} x' &= 4x + 2y + 1 \\ y' &= 3x - y - 4te^{-2t} \end{aligned}$$
Dibuje el retrato fase asociado a flujo del sistema homogéneo.

2. Usando series de potencias alrededor de $x = 0$, calcule la solución particular de la ecuación
$$(1 + x^2)y'' + y = 0,$$
que satisface $y(0) = 0$ y $y'(0) = 1$. Determine el radio de convergencia de la solución.

3. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ y suponga que todos sus eigenvalores tienen parte real negativa. Demuestre o de un contraejemplo:
   (a) Si φ_t es el flujo asociado a A, entonces para toda $x \in \mathbb{R}^n$, $\varphi_t(x) \to 0$ cuando $t \to \infty$.
   (b) Si $B \in M_n(\mathbb{R}^n)$ tiene todos sus eigenvalores con parte real negativa, entonces A y B son campos vectoriales con espacios fase equivalentes.

4. Sea $J \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto que contiene al origen. Sea $f : J \to \mathbb{R}$ continua y considere la ecuación homogénea de primer orden
$$\frac{dx}{dt} = f(t)x.$$
Demuestre lo siguiente:
   (a) Dada la condición inicial $x(0) = x_0$, existe una única función $x : J \to \mathbb{R}$, continua y diferenciable que es solución del problema de valor inicial.
   (b) El conjunto de soluciones de la ecuación diferencial es un espacio vectorial de dimensión 1.

Tiempo límite: 2 horas.