

CIMAT

90EDO01

Ecuaciones Diferenciales
Ordinarias

Abril 2 , 2009

Examen Parcial 2

Cada problema tiene un valor de 2.5 puntos. Puede utilizar los resultados vistos en clase y en las tareas salvo si se pide explícitamente demostrarlos.

1. Utilice el Lema de Grönwall para demostrar lo siguiente:

Sea E un espacio vectorial normado, $W \subset E$ un abierto no vacío y $f \in \mathfrak{X}^1(W, E)$ un campo vectorial. Considere la ecuación autónoma $x' = f(x)$. Suponga que existen dos soluciones $t \mapsto x(t)$, $t \mapsto y(t)$ definidas en $J = [0, T]$. Demuestre que existe una constante $L > 0$ tal que

$$|x(t) - y(t)| \leq |x(0) - y(0)|e^{Lt}.$$

2. Demuestre o de un contraejemplo a la siguiente afirmación.

Sea $f \in \mathfrak{X}^1(W, \mathbb{R}^n)$ el campo vectorial asociado a la ecuación $x' = f(x)$. Sea K un compacto arbitrario contenido en $W \subset \mathbb{R}^n$. Entonces, toda solución $x(t)$ con condición inicial $x(0) = x_0 \in K$ puede extenderse a una solución que interseca la frontera de K .

3. Sea $A \in L(E)$ y considere $x' = Ax$. Suponga que el punto de equilibrio $\bar{x} = 0$ es un pozo lineal. Demuestre que \bar{x} es asintóticamente estable.
4. Considere el siguiente sistema de ecuaciones no lineal

$$\begin{aligned} x' &= -3y - 4z + (x + y)x^2, \\ y' &= x + 4y - z + (x + y)y^2, \\ z' &= 4z + (x + y)z^2. \end{aligned}$$

- (a) Calcule el sistema lineal asociado al punto de equilibrio $\bar{x} = (0, 0, 0)$ y determine si es un pozo, fuente, silla o no hiperbólico.
- (b) ¿Qué puede decir sobre la estabilidad de \bar{x} para el sistema no lineal? Justifique sus argumentos.

Tiempo límite: 2 horas.