CIMAT

90EDO01 — Ecuaciones Diferenciales Ordinarias — Mayo 21, 2009

Examen Parcial 3

Cada problema tiene un valor de 2.5 puntos. Puede utilizar los resultados vistos en clase y en las tareas salvo si se pide explícitamente demostrarlos.

1. Por medio de *una función de Lyapunov* apropiada, demuestre que el origen es un punto de equilibrio inestable para el sistema

$$\begin{aligned} x' &= x - x^3 + y, \\ y' &= -x + y. \end{aligned}$$

2. Sea $\Phi : W \to \mathbb{R}$ un potencial clase C^2 no nulo que define un sistema gradiente $x' = -\nabla\Phi(x)$ en un abierto $W \subset \mathbb{R}^n$. Suponga que para algún $x_0 \in W$ existe una sucesión $t_n \to \infty$ tal que $\varphi_{t_n}(x_0) \to x_0$. Demuestre que x_0 es un punto de equilibrio.

3. Considere el sistema

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= -x + y(1 - x^2 - 2y^2). \end{aligned}$$

Demuestre que el sistema tiene un ω–ciclo límite encontrando una región anular en $\mathbb{R}^2$ que es positivamente invariante bajo el flujo del sistema y que no contiene puntos de equilibrio. (Sugerencia: coordenadas polares.)

4. Demuestre o dé un contraejemplo a la siguiente afirmación.

> Considere el campo vectorial no nulo $f \in \mathfrak{X}^1(W, \mathbb{R}^2)$ asociado al sistema $x' = f(x)$ y con $W \subset \mathbb{R}^2$. Si $p \in W$ es un punto regular de f tal que $p \in \omega(p) \cap \alpha(p)$, entonces $\gamma_p = \{\varphi_t(p) \mid t \in J_p\}$ es una órbita cerrada.

Tiempo límite: 2 horas y 30 minutos.