CIMAT

90EDO01	Ecuaciones Diferenciales Ordinarias	Mayo 28, 2009

Examen Final

Cada problema tiene un valor de 1.25 puntos. Puede utilizar los resultados vistos en clase y en las tareas salvo si se pide explícitamente demostrarlos.

1. Encuentre la solución general para la ecuación diferencial

$$(x^2+1)y' + 3xy = 6x,$$

y determine su dominio de definición.

2. Demuestre que la ecuación diferencial $x^2y'' + x^2y' + y = 0$ no tiene solución en series de potencia de la forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

3. Demuestre que la ecuación $x' = x^{2/3}$ tiene un número infinito de soluciones particulares asociadas a la condición $x(0) = 0$ y definidas en todo intervalo $[0, \beta]$. ¿Por qué el resultado no contradice el Teorema Local de Existencia y Unicidad?

4. Sea $W \subset \mathbb{R}$ un abierto no vacío y $f \in \mathfrak{X}^1(W, \mathbb{R})$ un campo vectorial localmente Lipschitz en W. Suponga que $\varphi : [0, \beta] \times W \to W$ es el flujo asociado a la ecuación diferencial $x' = f(x)$, con $\varphi(t, x) \in W$ para toda $t \in [0, \beta] \subset J_x$. Demuestre que $\varphi(t, x)$ es continua para todo punto $(t, x) \in (0, \beta) \times W$.

5. Sea $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ clase C^2 un potencial definido por

$$\Phi(w) = \Phi(x, y) = (x-1)^2 + y^2$$

y considere el sistema gradiente $w' = -\nabla\Phi(w)$. Determine la estabilidad lineal de sus puntos de equilibrio. Con la ayuda de las curvas de nivel asociadas al potencial, bosqueje el retrato fase del sistema.

6. Sea $\bar{x}$ un punto de equilibrio hiperbólico del sistema no lineal $x' = f(x)$, $f \in \mathfrak{X}^1(W, E)$. Demuestre que $\bar{x}$ es inestable o asintóticamente estable (en el sentido de Lyapunov).

7. Por medio de una función de Lyapunov, determine la estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema

$$\begin{aligned} x' &= y - x^3, \\ y' &= -x - y^3. \end{aligned}$$

8. Considere el sistema Halmitoniano sobre $\mathbb{R}^2$ asociado a una función $H \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ con $H(p, q) = p^2/2 + q^2/3$. Demuestre que H es una primera integral del sistema y por lo tanto, es constante en algún abierto de $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

Tiempo límite: 4 horas.