CIMAT

90EDO01	Ecuaciones Diferenciales Ordinarias	Abril 23, 2009

Tarea 10.1

1. Demuestre que el sistema de ecuaciones en coordenadas polares

$$\theta' = 1, \quad r' = \begin{cases} r^2 \sin(1/r), & r > 0 \\ 0, & r = 0 \end{cases}$$

   tiene un punto de equilibrio estable en el origen polar.

2. Sea $(w, z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \cong \mathbb{C}^2$ y considere el sistema

$$\begin{aligned} w' &= 2\pi i w, \\ z' &= 2\pi \theta i z, \end{aligned}$$

   con $\theta \in \mathbb{R}$ irracional.

   (a) Tomando $\alpha = e^{2\pi i\theta}$, demuestre que $\{\alpha^n \mid n = 1, 2, 3, \ldots\}$ es un conjunto denso en $S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

   (b) Denote por φ_t el flujo del sistema en $\mathbb{C}^2$. Demuestre que para cada entero n, $\varphi_n(w, z) = (w, \alpha^n z)$.

   (c) Sea (w_0, z_0) un punto sobre el toro $\mathbb{T} \cong S \times S \subset \mathbb{C}^2$. Demuestre usando (a) y (b) que $\omega((w_0, z_0)) = \alpha((w_0, z_0)) = \mathbb{T}$.

   (d) Dado $(w_1, z_1) \in \mathbb{C}^2 - \mathbb{T}$ arbitrario, calcule $\alpha((w_1, z_1))$ y $\omega((w_1, z_1))$.

3. Dada una solución $x(t)$ de $x' = f(x)$ y totalmente contenida en un compacto $K \subset W$, demuestre que los conjuntos $\alpha(x(t))$ y $\omega(x(t))$ son conexos.

4. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ clase C^1. Dado $\varepsilon \in \mathbb{R}$ suficientemente pequeño, defina $F_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ como $F(x) = x + \varepsilon f(x)$. Demuestre que F_ε es invertible en una vecindad del origen y calcule $DF_\varepsilon^{-1}(0)$.

Fecha de entrega: Abril 30, 2009 en clase.