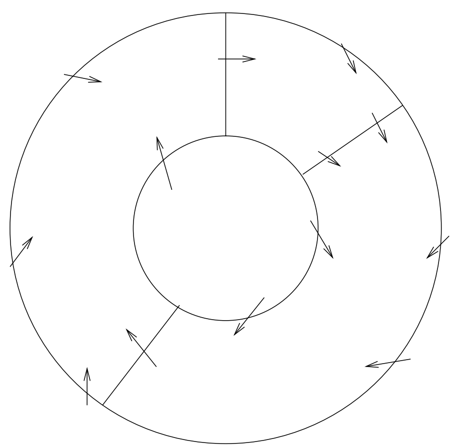
CIMAT

90EDO01 | Ecuaciones Diferenciales Ordinarias | Mayo 8, 2009

Tarea 11

1. En el problema 3 de la tarea 10, la hipótesis de compacidad es necesaria para demostrar que los conjuntos límites son conexos. Omitiendo ésta hipótesis, de un ejemplo de un flujo en $\mathbb{R}^n$ cuyo omega–límite es disconexo.

2. Sea $W \subset \mathbb{R}^2$ y suponga que el anillo
$$A = \{w \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq |w| \leq 2\},$$
está contenido en W. Sea $f \in \mathfrak{X}^1(W)$ tal que, para todo punto $w \in \partial A$, $f(w)$ apunta hacia el interior de A. Suponga además que cada segmento radial de A es una sección transversal al campo vectorial. Demuestre que existe una trayectoria periódica en A.



3. Dado $x' = f(x)$ con $f \in \mathfrak{X}^1$, suponga que existe un $x_0 \in W \subset \mathbb{R}^2$ tal que $\varphi_{t+T}(x_0) = \varphi_t(x_0)$ para un $T > 0$ fijo. Denote por γ la curva trayectoria de x_0. Demuestre que para cualquier sección transversal S, $\gamma \cap S$ es, a lo más un punto.

4. Considere el siguiente sistema en $\mathbb{R}^2$
$$\begin{aligned} x' &= -y + x(1 - x^2 - y^2), \\ y' &= x + y(1 - x^2 - y^2). \end{aligned}$$

(a) Reescriba el sistema en coordenadas polares y encuentre el flujo polar. No olvide especificar los dominios de definición del cambio de variable y del flujo.

(b) Demuestre que $S = \{(r, \theta) \mid \theta \equiv 0 \mod 2\pi\}$ es una sección para el flujo.

(c) Demuestre que la solución $r = 1$ es un ciclo límite para el sistema.

Definición: Un *cíclo límite* es una órbita cerrada γ que pertenece al omega– ó alfa–límite de un punto $x \notin \gamma$. Si $\gamma \subset \omega(x)$ (resp. $\gamma \subset \alpha(x)$) entonces se le llama ω–*cíclo límite* (resp. α–*cíclo límite*).

Fecha de entrega: Mayo 14, 2009 en clase.