CIMAT

90EDO01 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Febrero 5, 2009

Tarea 2.3

1. Sea $\mathbb{P}_n(\mathbb{R}) = \{p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \mid a_n \geq 0, a_j \in \mathbb{R}\}$ el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual que $n > 0$ con coeficientes reales. Sea
$$D_x : \mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_n(\mathbb{R}),$$
el operador derivada, *i.e.*, $D_x(p(x)) := p'(x)$. Demuestre que D_x es un operador lineal y nilpotente de grado n.

2. Sea $A \in \mathbb{L}(\mathbb{R}^n)$ con todos sus eigenvalores reales y distintos. Sea $\varphi(t, x)$ el flujo asociado al sistema $x' = Ax$, con condición inicial $\varphi(0, x_0) = x_0$.
   (a) Demuestre que las soluciones son continuas con respecto a la condición inicial. Esto es, para cada t,
   $$\lim_{y_0 \to x_0} \varphi(t, y_0) = \varphi(t, x_0).$$
   (Sugerencia: suponga que A es diagonal.)
   (b) Mejore el resultado anterior encontrando constantes $M \geq 0$ y $c \in \mathbb{R}$ tal que
   $$|\varphi(t, y_0) - \varphi(t, x_0)| \leq M e^{ct} |y_0 - x_0|.$$

3. Sea $A \in \mathbb{L}(\mathbb{R}^n)$ un operador lineal tal que deja invariante un subespacio $S \subset \mathbb{R}^n$ (esto es $Av \in S$ para todo vector $v \in S$). Sea $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ solución de $x' = Ax$. Si $x(t_0) \in S$ para algún $t_0 \in \mathbb{R}$, demuestre que $x(t) \in S$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

4. Clasifique y dibuje los espacios fase asociados al sistema $x' = Ax$ cuando $A \in \mathbb{L}(\mathbb{R}^2)$ y $0 \in \mathrm{Spec}(A)$ y cuando $A \in \mathbb{L}(\mathbb{R}^3)$ y $\mathrm{Spec}(A) = \{0, a + ib\}$ con $b \neq 0$.

5. Sea $A \in \mathbb{L}(\mathbb{R}^n)$ tal que para todo $\lambda \in \mathrm{Spec}(A)$, se satisface $\mathrm{Re}(\lambda) \leq 0$.
   (a) Si A es semisimple, demuestre que toda solución de $x' = Ax$ es acotada para tiempo $t \to +\infty$.
   (b) Construya un ejempo para el cual A no es semisimple y existe una solución tal que
   $$\lim_{t \to +\infty} |x(t)| = \infty.$$

Fecha de entrega: Febrero 12, 2009 en clase.