CIMAT

90EDO01 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Febrero 12, 2009

Tarea 3.0

1. Resuelva los siguentes sistemas de ecuaciones diferenciales $\bar{x}' = A\bar{x} + B(t)$ usando variación de parámetros.

   (a) Encuentre la solución al problema de valor inicial cuando

   $$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \bar{x}(1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

   (b) Encuentre la solución general con la misma matriz A y

   $$B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t^{-2} \end{pmatrix}.$$

2. Denote por $V_1 = 100$ y $V_2 = 200$ el volumen en litros cúbicos de dos tanques de agua. El tanque 1 es alimentado por una toma de agua natural, su contenido fluye al tanque 2 y luego fuera de él, todo a una razón de 10 litros por minuto. Suponga que al tanque 1 se le agrega una cierta cantidad de sal tal que su flujo al tanque 2 tiene una concentración de 2 kilos de sal por litro.

   (a) Encuentre las cantidades $x_1(t)$ y $x_2(t)$ de sal en los dos tanques después de t minutos.

   (b) Encuentre la cantidad de sal en cada tanque después de transcurrido un periodo de tiempo suficientemente largo.

   (c) Determine cuánto tiempo deberá transcurrir para que cada tanque tenga una concentración de 1 kilo de sal por litro.

3. Demuestre el *Principio de Superposición*:

   Considere el sistema de ecuaciones homogéneo $\bar{x}' = A\bar{x}$ y suponga que $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ son n soluciones definidas en el intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Si $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son constantes, entonces la combinación lineal

   $$c_1\bar{x}_1(t) + c_2\bar{x}_2(t) + \ldots + c_n\bar{x}_n(t),$$

   es solución del sistema homogéneo y está definida en I.

4. Demuestre la *Existencia e Independencia Lineal de Soluciones Homogéneas*:

   Considere la ecuación diferencial homogénea de coeficientes constantes
   $$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = 0,$$
   con condiciones iniciales
   $$y(x_0) = \alpha_0,\ y'(x_0) = \alpha_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1}.$$
   Entonces existen n soluciones $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ definidas en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ y son linealmente independientes entre ellas para toda $x \in I$.

5. Resuelva las siguientes ecuaciones usando el método de coeficientes indeterminados:

   (a) $(D-2)(D^2+9)y = x^2e^{2x} + \sin 3x$.

   (b) $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos 2x$.

Fecha de entrega: Febrero 19, 2009 en clase.