CIMAT

90EDO01 | Ecuaciones Diferenciales Ordinarias | Marzo 5, 2009

Tarea 5.0

1. Una función f definida para todo punto (x, y) en un conjunto S satisface una condición Lipschitz si existe una constante $K > 0$ tal que
$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|,$$
para toda $(x, y_1), (x, y_2) \in S$. Demuestre que las siguientes funciones satisfacen condiciones Lipschitz en los conjuntos indicados:
   (a) $f(x, y) = 4x^2 + y^2$, con $S = \{(x, y) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$.
   (b) $f(x, y) = x^3 e^{-xy^2}$, con $S = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq a, |y| < \infty\}$ y $a > 0$.

2. Considere un espacio vectorial normado E, S un subconjunto no vacío de E y una función $f : S \to \mathbb{R}$ uniformemente continua.
   (a) Suponga que $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en S. Demuestre que $\{f(p_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$.
   (b) Demuestre que existe una función continua $\widetilde{f} : \overline{S} \to \mathbb{R}$, tal que $\widetilde{f} \equiv f$ en S.

3. Considere la ecuación diferencial homogénea de coeficientes constantes
$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0.$$
¿Qué puede decir[1] sobre la dependencia continua de las soluciones con respecto a condiciones iniciales? Justifique sus argumentos.

4. Sean $f, g \in C^1(W, E)$ y J un intervalo cerrado que contiene a t_0. Denote por $z, y : J \to W$ respectivamente, dos soluciones a las ecuaciones diferenciales
$$z' = f(z) \quad \text{y} \quad y' = g(y).$$
Si existen $\varepsilon, \delta > 0$ tales que para toda $x \in W$,
$$|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon \text{ y } |z(t_0) - y(t_0)| \leq \delta,$$
demuestre que $|z(t) - y(t)|$ crece a lo más de forma exponencial.

Fecha de entrega: Marzo 12, 2009 en clase.

[1] ...sin consultar la literatura