CIMAT

90EDO01 — Ecuaciones Diferenciales Ordinarias — Marzo 19, 2009

Tarea 7.1

1. Sea $f(x) = -x + x^2$ y considere la ecuación $x' = f(x)$.
   (a) Encuentre el intervalo de definición y la solución particular $x : J \to \mathbb{R}$, con $x(0) = 1/2$.
   (b) Encuentre la ecuación variacional asociada $u' = A(t)u$ con respecto a la solución particular obtenida en (a).
   (c) Verifique directamente que $u(t) = \partial_x \varphi_t(x)|_{x=1/2}$ es solución de la ecuación variacional.

2. Denote la norma euclideana por $|\cdot|$ y considere el sistema de ecuaciones $x' = Ax$ con
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$
Demuestre que es falso que $|e^{At}x| \leq |x|$ para toda $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^2$.

3. Considere el sistema depredador–presa dado por
$$x' = -x + xy, \quad y' = ry(1 - \frac{y}{k}) - axy,$$
donde x = depredador, y = presa, $r > 0$ taza de crecimiento de la presa, $k > 0$ constante de sostenimiento del entorno para la presa, $0 \leq a \leq 1$ capacidad del depredador para atrapar la presa.
   (a) Linearize el sistema en cada punto de equilibrio. ¿Bajo qué condiciones sobre los parámetros (si existen) implica la existencia de un punto de equilibrio asintóticamente estable[1]?
   (b) Interprete los resultados de (a) en función de las poblaciones de presa y depredador.

4. De un ejemplo de un campo vectorial no lineal $f \in \mathfrak{X}^1(E)$ con $f(0) = 0$ y $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ para toda solución de $x' = f(x)$ *sin que los eigenvalores de* $Df(0)$ *tengan parte real negativa.*

[1] Ver definición a la vuelta.

Definición: Un punto de equilibrio $\bar{x}$ es *asintóticamente estable* para $x' = f(x)$ si para toda vecindad $U = U(\bar{x}) \subset W$, existe una vecindad $U_1 \subset U$, con $\bar{x} \in U_1$ y tal que, toda solución $x(t)$ con condición inicial en U_1, está definida para todo $t > 0$, $x(t) \in U$ y $x(t) \to \bar{x}$ cuando $t \to +\infty$.

Fecha de entrega: Marzo 26, 2009 en clase.