CIMAT

90EDO01	Ecuaciones Diferenciales Ordinarias	Abril 16, 2009

Tarea 9.0

1. Considere el sistema de ecuaciones diferenciales del péndulo con fricción

$$\begin{aligned} \theta' &= \omega, \\ \omega' &= -\sin\theta - A\omega, \end{aligned}$$

   con $A = k/m$. Para los puntos de equilibrio $(n\pi, 0)$ con $n = 0, \pm 1$, determine su estabilidad linearizando (si es suficiente) o utilizando el método directo de Lyapunov. Bosqueje en un mismo diagrama el espacio fase asociado a cada punto.

2. Para el sistema gradiente $w' = -\nabla\Phi(w)$, con $\Phi(w) = \Phi(x, y) = 2x^2 - 2xy + 5y^2 + 4x + 4y + 4$, calcule los puntos de equilibrio y clasifiquelos de acuerdo a su estabilidad. Bosqueje las superficies de nivel de Φ en el diagrama fase del sistema.

3. Demuestre que para cualquier sistema gradiente $x' = -\nabla\Phi(x)$, no existen soluciones periódicas no triviales.

4. Una función $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ clase C^1, dada por

$$(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n) \mapsto H(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$$

   define un *sistema Halmitoniano* asociado al *Halmitoniano* H por

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

   para $i = 1, \ldots, n$. Dado $c \in \mathbb{R}$, defina la *superficie de nivel regular* por

$$S_c = \{(q, p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid H(q, p) = c, \ \nabla H(q, p) \neq 0\}.$$

   Demuestre que cada S_c es un conjunto invariante bajo el flujo del sistema Halmitoniano.

Para reflexionar: En función de los problemas 3 y 4, ¿cuál es la relación geométrica entre el sistema gradiente $(q', p') = (-\partial_q H, -\partial_p H)$ y el sistema Halmitoniano $(q', p') = (\partial_p H, -\partial_q H)$?

Fecha de entrega: Abril 23, 2009 en clase.