CIMAT

90DSI02 Dinámica Racional Febrero 5, 2010

Tarea 1

1. Sea f meromorfa en $\mathbb{C}$ y suponga que existe un entero $m > 0$ tal que $\#f^{-1}(w) \leq m$ para todo $w \in \mathbb{C}$. Demuestre que f es racional.
2. Demuestre que ambas hipótesis del Teorema de la Aplicación de Rieman son necesarias. Esto es, proporcione contraejemplos para el teorema si se omite cada una de las condiciones siguientes:
   (a) D debe ser un subconjunto propio de $\mathbb{C}$.
   (b) D debe ser simplemente conexo.
3. Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones holomorfas sobre un dominio $E \subset \mathbb{C}$ y suponga que para toda $f \in \mathcal{F}$, $|f'| \leq M$ en E. Entonces $\mathcal{F}$ es una familia equicontinua en E.
4. Sea $g : U \to \overline{\mathbb{C}}$ una función analítica no constante y $U \subset \mathbb{C}$ un dominio no vacío arbitrario. Tomemos $V = g(U)$ y considere una familia $\mathcal{F}$ de funciones meromorfas definidas sobre V. Demuestre que $\mathcal{F}$ es normal si y sólo si, la familia de composiciones $\mathcal{G} = \{f \circ g \mid f \in \mathcal{F}\}$ es normal en U.
5. Sea $\mathcal{F}$ una familia normal de funciones meromorfas definida sobre un dominio $U \subset \mathbb{C}$ no vacío. Demuestre que $\mathcal{G} = \{M \circ f \mid f \in \mathcal{F}\}$ es de nuevo una familia normal para toda transformación $M \in \text{Möb}(\overline{\mathbb{C}})$.

Teorema de la Aplicación Conforme de Riemann:
Si $D \subset \mathbb{C}$ es un dominio simplemente conexo y tal que $D \neq \mathbb{C}$, entonces D es conformemente equivalente a $\mathbb{D}$. En particular, existe un único isomorfismo conforme $\varphi : D \to \mathbb{D}$, que satisface $\varphi(z_0) = 0$ y $\varphi'(z_0) > 0$ para algún $z_0 \in D$.

Fecha de entrega: Febrero 12, 2010 en clase.