CIMAT

90DSI02 | Dinámica Racional | Mayo 10, 2010

Tarea 12

1. Demuestre que la aplicación $\psi(z,\lambda) = z\exp(i\Omega(\theta,\lambda))$ definida en la tarea anterior es inyectiva en $\partial\mathbb{D}$ con respecto al parámetro. Esto es, si λ y μ pertenecen a Λ y $z \in \partial\mathbb{D}$, entonces $h(z,\lambda) \neq h(z,\mu)$ si $\lambda \neq \mu$.

2. Sea $f \in \mathrm{Rat}_d$ con $d \geq 1$. Denote por α_j, β_j y γ_j todos las preimagenes de 1, 0 e ∞, respectivamente. Demuestre que f puede escribirse como
$$f(z) = \prod_{j=1}^{d} [z, \alpha_j, \beta_j, \gamma_j],$$
donde
$$[z,a,b,c] = \frac{(z-b)(a-c)}{(a-b)(z-c)},$$
denota la razón cruzada de estos números.

3. Considere las aplicaciones casiconformes $\Phi_s(z) = \varphi_{\gamma(0)}^{-1} \circ \varphi_{\gamma(s)}(z)$ y las deformaciones $\tilde{g} = \tilde{g}_s$ descritas en clase. Demuestre que para todo dominio estable $U \subset \mathcal{F}(\tilde{g})$, $\Phi_s(U) = U$ y $\Phi_s = id$ en $\mathcal{J}(\tilde{g})$.

4. Dados $a, b \in \mathbb{D}$, denote por $d_h(a,b)$ la distancia hiperbólica entre estos dos puntos dada por
$$d_h(a,b) = \inf_{\gamma} \int_{\gamma} \frac{2|dz|}{1-|z|^2},$$
donde el ínfimo se toma sobre todas las curvas γ que conectan a con b. Demuestre lo siguiente:

   (a) Si γ representa cualquier curva que conecta 0 con $r \in (0,1)$ (con excepción de la línea recta entre 0 y r) entonces
   $$\int_{\gamma} \frac{2|dz|}{1-|z|^2} > \log\left(\frac{1+r}{1-r}\right).$$

   (b) Verifique que para cualquier $a, b \in \mathbb{D}$,
   $$d_h(a,b) = \log\left(\frac{1+\left|(a-b)/(1-\bar{b}a)\right|}{1-\left|(a-b)/(1-\bar{b}a)\right|}\right).$$

Fecha de entrega: **Mayo 14**, 2010 en clase.