CIMAT

90DSI02 Dinámica Racional Febrero 26, 2010

Tarea 4

1. Sea $\mathcal{A}$ la cuenca de atracción de un punto periódico atractor (ya sea geométrico o superatractor). Si $\mathcal{A}$ contiene un número finito de componentes simplemente conexas, demuestre que el punto periódico es de periodo a lo más 2.

2. Demuestre que todo ciclo atractor tiene en su cuenca inmediata un punto crítico de f de la siguiente forma:

   (a) Suponga lo contrario. Sea $\mathcal{O} = \{z_0, \ldots, z_k\}$ la órbita periódica y $\mathcal{A}^*(\mathcal{O})$ su cuenca inmediata. Si $U = U(z_j)$ es una vecindad pequeña para algún $z_j \in \mathcal{O}$, demuestre que para cada $n \geq 1$ existe una rama inversa $g_n : U \to \overline{\mathbb{C}}$ de $f^{-n}|_U$ que envía z_j en U.

   (b) Demuestre que $\{g_n\}$ es una familia normal, lo cual contradice el hecho que $(g_n)'(z_j)$ es no acotada.

3. Considere $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0$ un polinomio mónico de grado $n \geq 2$. Demuestre que para un $R >> 1$ y $V = \{z : |z| > R\}$ existe un biholomorfismo local $\Phi : V \to \mathbb{C}$ con expansión

$$\Phi(z) = bz + b_0 + \frac{b_1}{z} + \ldots,$$

   y satisface $\Phi(f(z)) = (\Phi(z))^n$. Además Φ es única salvo una constante multiplicativa ω, con $\omega^{n-1} = 1$.

4. De un ejemplo de una función propia de grado n que envia un dominio $(n+1)$–conexo sobre $\mathbb{D} \setminus \{0\}$.

Fecha de entrega: Marzo 5, 2010 en clase.