CIMAT

90DSI02 Dinámica Racional Marzo 5, 2010

Tarea 5

1. Sea $f(z) = az^n + \ldots$ una función racional con $a \neq 0$ y $n \geq 2$. Sea $\mathcal{A}(0)$ la cuenca de atracción del origen. Demuestre que
$$f : \mathcal{A}(0) \overset{n+m:1}{\longrightarrow} \mathcal{A}(0),$$
para cierto entero $m \geq 0$ y $\mathcal{A}(0)$ es, o simplemente conexa o tiene conectividad infinita.

2. Para todo polinomio $p(z) = a_d z^d + \ldots + a_0$ con $d \geq 2$, demuestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes.
   (a) $\mathcal{A}(\infty)$ es simplemente conexa.
   (b) $\mathcal{J}(p)$ es conexo.
   (c) Las coordenadas de Böttcher Φ definen un isomorfismo conforme entre $\mathcal{A}(\infty)$ y el disco $|z| > |a_d|^{1/(d-1)}$.
   (d) p' no tiene ceros en $\mathcal{A}(\infty)$.

3. Dado $f(z) = z - 1/z$, pruebe que existe un punto parabólico en infinito con dos direcciones atractoras. Además pruebe que $\mathcal{J}(f) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

4. Para las siguientes funciones racionales, demuestre la existencia de uno o varios dominios de Fatou completamente invariantes, indique su clase (dominio Böttcher, Schröder, Leau, indiferente irracional) y si es simplemente conexo ó infinitamente conexo. Si es posible, obtenga imágenes de los conjuntos de Julia.
   (a) $A(z) = \lambda z + z^2$, con $\lambda = \exp(\pi i(\sqrt{5} - 1))$.
   (b) $B(z) = 6z(1 - z)$.
   (c) $C(z) = z - z^2 + z^3/z_0$, con $z_0 = -0.41 + 0.54i$.

Fecha de entrega: Marzo 12, 2010 en clase.